[수열의 극한 참/거짓]

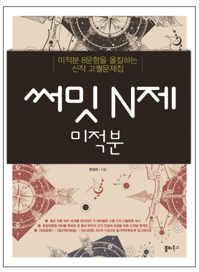
| 한성은 |

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY, 일산종로학원

내신대비용으로 모은 것이지만, 수능 대비로도 한 번쯤 다뤄볼만 합니다.
수열의 극한은 원래 증명이 되지 않는 명제가 많습니다. 너무 따지고 들지 마세요.

유튜브 〈한성은〉 놀러오세용.
N제를 출간했습니다. 사주세요.



CCL

Pattern Drill

수열 극한의 진위판정

수열 극한의 진위판정

① 수렴성의 연산 : 수렴하는 것끼리 더하기, 빼기, 곱하기는 되고 나누기는 조심

② 부정형의 이해 : $\frac{\infty}{\infty}$나 $\infty-\infty$ 꼴은 어떻게 될지 몰라.

③ 샌드위치 정리 : 모든 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

④ 반례 찾기 : 일단 대충 0, 1, 0, 1, 0, 1, ⋯ 이런 것들로..?

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$이다.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$이다.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = \alpha$이다.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n} = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+1} = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{3n+2} = \alpha$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$이다.

6. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n + b_n\}$은 수렴한다.

7. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n b_n\}$은 수렴한다.

8. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴한다. (단, $b_n \neq 0$)

9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다. (단, $a_n \neq 0$)

10. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$이다.

12. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

13. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

14. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 발산하면 수열 $\{a_n b_n\}$도 발산한다.

15. 수열 $\{a_n + b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$ 또는 수열 $\{b_n\}$이 수렴한다.

16. 수열 $\{a_n b_n\}$이 발산하면 수열 $\{a_n\}$ 또는 수열 $\{b_n\}$이 발산한다.

17. 수열 $\{a_n b_n\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 중 적어도 하나는 수렴한다.

18. 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$이 발산하면 수열 $\{a_n\}$ 또는 수열 $\{b_n\}$이 발산한다.

19. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 수열 $\{b_n\}$이 발산하면 수열 $\{a_n b_n\}$이 발산한다.

20. 수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 값으로 수렴하고 수열 $\{b_n\}$이 발산하면 수열 $\{a_n b_n\}$이 발산한다.

21. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n - b_n\}$이 같은 값으로 수렴하면 수열 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$은 0으로 수렴한다.

22. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \alpha^2$이다.

23. 수열 $\{a_n^2\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

24. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\alpha}$이다. (단, $\alpha > 0$)

25. 수열 $\{|a_n|\}$이 수렴하면 $\{a_n\}$도 수렴한다.

26. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}a_{2n} = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

27. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

28. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$이다.

29. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

30. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ 또는 $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$이다.

31. 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le M$(상수)이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

32. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$이다.

33. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

34. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, 모든 자연수 n에 대하여 $b_n > 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$이다.

35. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$이면 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

36. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이다.

37. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이거나 $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$이다.

38. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 수열 $\{a_n - b_n\}$은 수렴한다.

39. $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다.

40. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

41. $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n)$가 수렴한다.

42. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

43. 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에서 $a_n < b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

44. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < c_n < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$이면 수열 $\{c_n\}$은 수렴한다.

45. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < b_n$이고 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

46. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < 1$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n) = 0$이다.

47. 모든 자연수 n에 대하여 $1 < a_n$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n) = \infty$이다.

48. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 0 < b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

49. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

50. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이고 $a_{n+1} > \frac{100}{99}a_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다.

51. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $|b_n| < |c_n|$일 때 수열 $\{a_n c_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n b_n\}$도 수렴한다.

52. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 0 < b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

급수의 극한 진위판정

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

② 급수의 수렴과 수열의 수렴 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 역은 ㄴㄴ

③ p급수 : $\sum_{n=1}^{\infty} x^p$는 $p < -1$이면 수렴하고, $p \geq -1$이면 발산한다.

④ 등비급수가 수렴하는 범위 : $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 $a=0$이거나 $-1<r<1$이면 수렴한다.

53. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

54. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$이 수렴한다.

55. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

56. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = S$이다.

57. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$이면 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} a_k = S$이다.

58. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = S$이다.

59. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이다.

60. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \beta$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha + \beta$이다.

61. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이고 $\alpha > \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

62. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$은 발산한다.

63. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

64. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하고 수열 $\{a_n\}$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

65. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이면 $\alpha > \beta$이다.

66. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이면 $\alpha \geq \beta$이다.

67. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $b_n = a_{n+1} - a_n$일 때, $\{a_n\}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.

68. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $b_n = a_{n+1} - a_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\{b_n\}$이 수렴한다.

69. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$도 발산한다.

70. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$은 수렴한다.

71. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

72. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$도 수렴한다.

73. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴한다.

74. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

75. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$이 수렴한다.

76. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

77. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴한다.

78. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

79. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$도 수렴한다.

80. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

81. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$이다.

82. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$도 수렴한다.

83. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$도 수렴한다.

84. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다.

85. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 발산한다.

86. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}$도 수렴한다.

87. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 수렴한다.

88. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\{a_n\}$이 발산하면 $\{a_{2n}\}$도 발산한다.

89. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$도 수렴한다.

90. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$도 수렴한다.

91. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\,3}$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\,3}$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$은 수렴한다.

92. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 중 하나는 수렴한다.

93. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 0$이면 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$의 공비는 서로 같다.

〈정답표〉

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	거짓	02	참	03	참	04	참	05	참
06	참	07	참	08	거짓	09	참	10	거짓
11	참	12	거짓	13	참	14	거짓	15	거짓
16	참	17	거짓	18	거짓	19	거짓	20	참
21	거짓	22	참	23	거짓	24	거짓	25	거짓
26	거짓	27	참	28	참	29	참	30	거짓
31	참	32	참	33	거짓	34	거짓	35	참
36	거짓	37	거짓	38	거짓	39	참	40	참
41	거짓	42	거짓	43	거짓	44	거짓	45	거짓
46	거짓	47	거짓	48	참	49	참	50	참
51	거짓	52	거짓	53	거짓	54	참	55	참
56	거짓	57	참	58	거짓	59	거짓	60	참
61	거짓	62	참	63	참	64	거짓	65	참
66	참	67	참	68	참	69	거짓	70	거짓
71	거짓	72	참	73	거짓	74	거짓	75	거짓
76	거짓	77	거짓	78	참	79	참	80	참
81	거짓	82	거짓	83	참	84	참	85	참
86	참	87	참	88	거짓	89	참	90	거짓
91	참	92	참	93	거짓				

COMMENT 12

$\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 존재하는 것이 이 명제의 전제가 아니냐는 좋은 의견.

너무 파고들지 말자. 출제자는 의외로 별 생각이 없다. 생각할 수록 손해.

COMMENT 27

$-|a_n| \le a_n \le |a_n|$에서 샌드위치.

COMMENT 28

증명은 잘 안 됩니다. (입실론 어쩌고 필요)

COMMENT 29

증명은 잘 안 됩니다.

COMMENT 31

$-Mb_n \le a_n b_n \le Mb_n$에서 샌드위치

COMMENT 46

반례 : $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$

COMMENT 47

반례 : $2^{\frac{1}{n(n+1)}}$

COMMENT 48

$a_n - b_n < a_n < 0$에서 샌드위치

COMMENT 49

$a_2 < \frac{1}{2}a_1$, $a_3 < \frac{1}{2}a_2$, $\cdots$, $a_n < \frac{1}{2}a_{n-1}$을 변변 곱하면 $0 < a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1$이다.

COMMENT 50

$a_n > a_1\left(\frac{100}{99}\right)^{n-1}$에서

COMMENT 52

반례 : $\{a_n\}$은 -1, $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{1}{4}$, -1, $-\frac{1}{6}$, -1, $-\frac{1}{8}$, $\cdots$,

$\{b_n\}$은 $\frac{1}{1}$, 1, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{5}$, 1, $\frac{1}{7}$, 1, $\cdots$으로.

COMMENT 73

반례 : $\{a_n\}$: -1, 1, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cdots$

COMMENT 75

반례 : $\{a_n\}$: -1, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$

COMMENT 76

반례 : $a_n = \frac{1}{n}$