[니네가 만든 모의고사]

| 한성은 & 5A수학학원(2024) |

한성은 (POSTECH 수학과)

5A ACADEMY

5A수학학원 학생들이 출제, 제가 수정/검수한 문항들입니다.
문항마다 번호(난이도)를 포함한 코멘트를 달았습니다.

올해는 좀 소극적으로 모았더니 문항이 적네요. 재미있게 풀어주세요.

출제 학생 명단입니다.
[대진고 구민채], [운정고 김동우], [운정고 김민성], [동패고 김차민], [정발고 박민서],
[세원고 신현범], [동패고 윤치영], [정발고 이건무], [저동고 이민기], [백신고 이서영],
[백석고 임찬영], [화정고 장창진], [백신고 정유찬], [대진고 홍경호].
1번~12번은 공통, 13번~16번은 미적분입니다.

CCL

[정발고 박민서]

1. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 집합

$$\left\{x \,\middle|\, \int_{t}^{f(x)} f(s)ds \le 0\right\}$$

의 원소의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 t가 -2와 4이다. $f(8)$의 값을 구하여라.

▷ 역대 니모 가장 아름다운 문항. 이 문항을 풀고 감동을 느끼지 못한다면 뇌가 없거나 심장이 없거나.

굳이 배치하면 22번인데, 22번치고는 너무 깔끔한 느낌.

[운정고 김동우]

2. $2 < b$인 실수 b에 대하여 $f(x) = x(x-2)(x-b)$이고

$$g(x) = \int_{0}^{x} f(s)ds$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $|g(x)+g(t)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않은 모든 실수 k의 개수를 $h(t)$라 할 때, $h(t)$가 불연속인 모든 실수 t를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것은 a_1, a_2, $\cdots$, a_m이다.

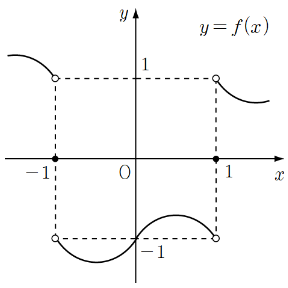
$$g(a_2) = g(a_5) = 0, \quad \int_{2}^{a_3} f(x)dx = -16$$

일 때, $m + f(1)$의 값을 구하여라.

▷ 적당히 촌스러운 느낌으로 잘 만들어진 22번.
t에 따라 $|g(x)+g(t)|$ 움직이는 부분이 좀 빡침.

[동패고 윤치영]

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to1+} f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(x)))))))))))$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

▷ 4번..?
합성함수의 극한은 수능 범위가 아닌 것 같기도.

[운정고 김민성]

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

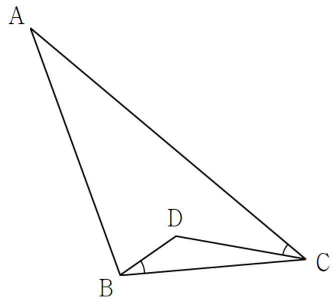
$$\{x\,|\,f'(x)=1\}=\{0,\ 2\}$$

를 만족시킨다. $f(1)=f'(1)$일 때, $f(4)$의 값을 구하여라.

▷ 20번. 삼차함수의 성질을 때려박고 싶은 문항.

[운정고 김민성]

5. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}$, $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC 내부의 점 D가 $\angle \mathrm{DBC}=\angle \mathrm{DCA}$를 만족시킨다. 세 점 B, C, D를 지나는 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, $2R^2$의 값을 구하여라.



▷ 9~11번급. 어릴 때 어디서 봤던 것 같은 느낌이지만.
가능한 삼각형 ABC가 두 종류, 어느 경우든 답은 같다.

[백신고 이서영]

6. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+2 & (n\text{이 5의 배수가 아닌 경우}) \\ -\frac{1}{5}n+a_1 & (n\text{이 5의 배수인 경우}) \end{cases}$$

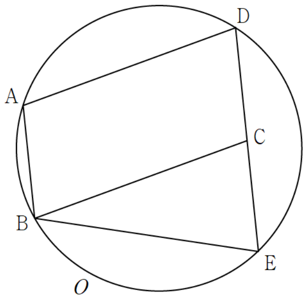
를 만족시킨다. $a_1=a_m$을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 115 ② 120 ③ 125
④ 130 ⑤ 135

▷ 12~13번 정도. 나열해가며 상황 이해.

[대진고 홍경호]

7. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{DA}$인 사각형 ABCD에 대하여 세 점 A, B, D를 지나는 원 O와 직선 CD가 만나는 D가 아닌 점을 E라 하자. 점 C가 선분 DE의 중점이고, $\cos(\angle BAD)=-\frac{1}{4}$, 원 O의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$일 때, $\overline{AB}$의 값은?



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

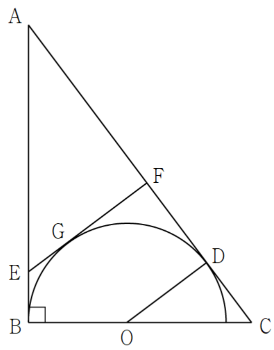
▷ 9~11번급. 원에 내접하는 사다리꼴.

[동패고 김차민]

8. 그림과 같이 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC와 선분 BC 위의 점 O를 중심으로 하고 직선 AC와 점 D에서 접하는 반원이 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 AC 위의 점 F에 대하여 선분 EF는 선분 OD와 평행하고 반원과 점 G에서 접한다.

$$\overline{BG}=\frac{8\sqrt{5}}{5},\quad \overline{AD}:\overline{CD}=4:1,\quad \sin(\angle BEF)=\frac{4}{5}$$

일 때, $\overline{DE}$의 값은?



① $\sqrt{46}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $\sqrt{52}$ ⑤ $\sqrt{54}$

▷ 9~11번에 놓기에는 계산이 좀 많은가?
평가원스럽지 않은 부분이 비대하긴 하다.

[정발고 이건무]

9. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 t에 대하여 $f(x)-x=f(t)-t$를 만족시키는 실수 x의 개수는 2 이상이다.
> (나) 방정식 $f(x)=x+2$의 서로 다른 모든 실근이 0, α, $\beta(0<\alpha<\beta)$이고, $\alpha\beta=8$이다.

$f(6)$의 값을 구하여라.

▷ 20번. 제작자는 조건 (가)를 $\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$에서 만들었는데, 다들 곡선 $y=f(x)-x$ 그려서 읽을 듯.

[세원고 신현범]

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최솟값이 0인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(3g(x))=g(x)$의 서로 다른 모든 실근이 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$이고 $\beta-\alpha=4$이다.

$f(1)=\dfrac{1}{3}$, $f'(0)>\dfrac{1}{3}$일 때, $f(6)+g(6)$의 값을 구하여라.

▷ 쉬운 22번. 합성함수를 포함한 방정식.
조건들이 하나하나 얹히게 잘 설정됐음.

[백신고 정유찬]

11. 함수

$$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)\ \ (k<0)$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$2 \le x \le 6$일 때 $g(x)=f(x)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x+4)=g(x)$이다.

방정식 $g(x)=\{f(x)\}^2$의 서로 다른 실근의 개수가 m일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\alpha+\beta=8$

ㄴ. $k=-\dfrac{1}{4}$, $\alpha=2$일 때, $m=5$이다.

ㄷ. $k\ne-\dfrac{1}{4}$, $m=5$일 때, 방정식 $g(x)=\{f(x)\}^2$의 실근 중 가장 작은 것은 $10-2\sqrt{17}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

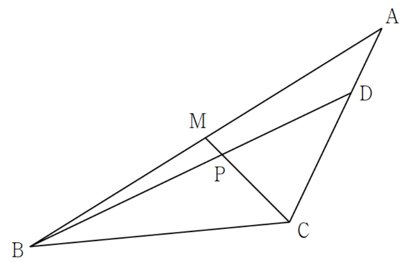
▷ 14번. ㄷ이 좀 지독하다.

[화정고 장창진]

12. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB의 중점을 M, 선분 AC의 $1:2$ 내분점을 D, 두 선분 CM과 BD의 교점을 P라 하자.

$$\overline{AC}=9,\quad \overline{PM}=1,\quad \overline{DC}=\overline{DP}$$

일 때, $\overline{AB}$의 값은?



① $4\sqrt{17}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{19}$
④ $8\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{21}$

▷ 굳이 놓자면 15번이나 21번이려나.

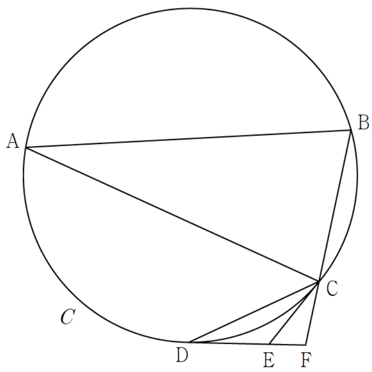
문항의 핵심은
$\overline{AM}:\overline{BM}$과 $\overline{AD}:\overline{CD}$가 주어져 있을 때,
$\overline{BP}:\overline{DP}$와 $\overline{CP}:\overline{MP}$를 구할 수 있다.
인데, 이걸 [메넬라우스의 정리]라고 하거든.
메넬라우스를 모른다면 삼각형 잘 쪼개서 넓이비 살펴야 함.

[저동고 이민기]

13. 그림과 같이 두 점 C, D가 각각 점 E에서 삼각형 ABC의 외접원 C에 그은 두 접선의 접점이고 두 직선 BC, DE가 만나는 점이 F이다.

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}},\quad \overline{\mathrm{EF}}:\overline{\mathrm{CF}}=\sqrt{5}:4$$

이고 원 C의 반지름의 길이가 5일 때, $\overline{\mathrm{BC}}$의 값은?



① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

▷ 25~26번..?
접선과 현이 이루는 각, 배각공식, 사인법칙.

[대진고 구민채]

14. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식

$$f'\left(\frac{3}{2}\sin x\right)=16$$

의 서로 다른 모든 실근이

$$\alpha,\ \beta\ (\alpha+\pi\le\beta)$$

이다. $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$일 때, $f\left(\frac{\beta}{\pi}\right)-f\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

▷ 28번. 합성함수를 포함한 방정식인데, 맛이 조금..?

[백석고 임찬영]

15. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 양수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le t < 3$인 모든 실수 t에 대하여
> $f(\sqrt{2}at^2) = \frac{1}{3}at^3 - 2at$이다.
> (나) $9\sqrt{2}a \le x$인 모든 실수 x에 대하여
> $xf'(x) - f(x)$의 값이 일정하다.

$0 \le x \le (9a+6)\sqrt{2}$일 때, 곡선 $y = f(x)$의 길이가 16이다. $60a$의 값을 구하여라.

▷ 애매하게 30번..? 어렵다기 보다는 낯선 느낌.
조건 (가)는 매개변수함수를 이상하게 준 것.
조건 (나)는 변형해서 양 변 적분이다.

[정발고 이건무]

16. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 0이 아닌 실수 b에 대하여

$$g(x) = f(b\sin x)e^{b\sin x}$$

이다. 자연수 m에 대하여 $0 < x < m\pi$에서 $g(x)$가 극값을 가지는 x값의 개수를 $h(b)$라 할 때, $h(b)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(b)$가 불연속이 되도록 하는
> 0이 아닌 실수 b의 개수는 2이다.
> (나) $\lim_{b \to 3+} h(b) - \lim_{b \to 3-} h(b) = 14$

$f(m)$의 값을 구하여라.

▷ 무난한 30번. 합성함수를 포함한 방정식.

[2024 니네가 만든 모의고사 정답표]

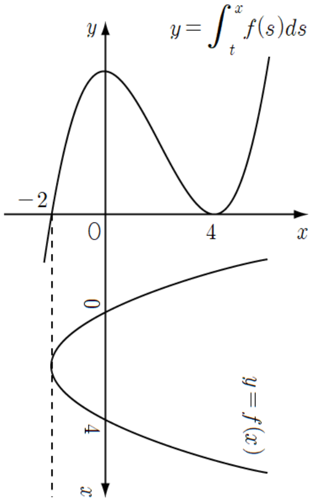
문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	16	02	12	03	④	04	19	05	3
06	①	07	②	08	④	09	200	10	155
11	⑤	12	③	13	②	14	③	15	20
16	28								

COMMENT 01

삼차함수 $\int_t^x f(s)dx$가 0 이하가 되는 x값에 이차함수 $f(x)$의 최솟값이 걸려야 한다.

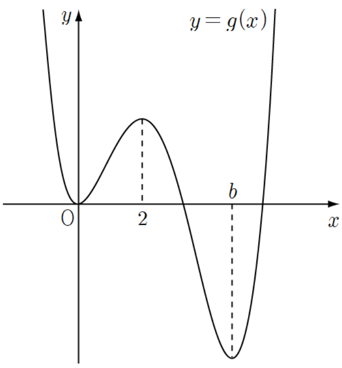
구간으로 들어가면 집합의 원소가 무한히 많아지거든. $\int_t^x f(s)dx = k(x+2)(x-4)^2$이다. 아래 그림 참고.

$f(x) = mx(x-4)$의 최솟값이 -2이므로 $f(x) = \frac{1}{2}x(x-4)$이다.

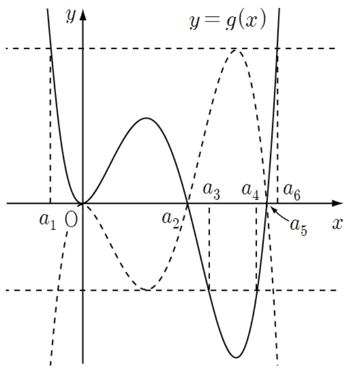


COMMENT 02

$y = g(x)$의 그래프는 대충 [그림1]과 같은 형태이다.
$|g(x)+g(t)|$가 좀 빡치게 헷갈리는데, 대충 잘 생각해보면 [그림2]와 같은 불연속점을 가진다.
[그림2]가 문항의 조건 $g(a_2) = g(a_5) = 0$에 맞는 케이스, $m = 6$이다.



[그림1]



[그림2]

$\int_2^{a_3} f(x)dx = -16$에서 $g(x)$의 극댓값이 8이므로 $\int_0^2 f(x)dx = 8$이다. $b = 7$, $f(1) = 6$이다.

COMMENT 03

$f(1^+) = 1^-$, $f(1^-) = -1^+$, $f(-1^+) = -1^-$, $f(-1^-) = 1^+$이다.
$f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(x))))))))))))$를 잘 보면 f가 12개다.

COMMENT 04

$f(x) = x^2(x-3) + x - 1$이다.

COMMENT 05

$\angle BCA = \frac{\pi}{4}$이고 $\angle BDC = \frac{3\pi}{4}$로 일정하다.

COMMENT 06

$1+12+23+34+45$

COMMENT 08

$\overline{AD} : \overline{CD} = 4:1$와 $\sin(\angle BEF) = \frac{4}{5}$를 이용하면 모든 선분의 길이의 비를 구할 수 있다.

COMMENT 09

(가)에서 $f(x) = (x-p)^2(x-q)^2 + x + k$ 꼴이다.

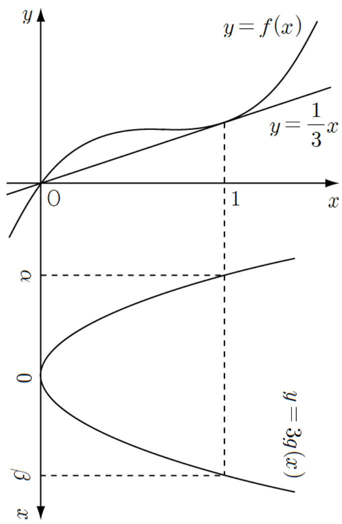
$f(x) = x+2$의 서로 다른 세 실근이 등차수열을 이룬다.

$f(x) = x(x-2)^2(x-4) + x + 2$이다.

COMMENT 10

방정식 $f(x) = \frac{1}{3}x$의 서로 다른 모든 실근이 0과 1이다.

$f(x) = x(x-1)^2 + \frac{1}{3}x, \quad g(x) = \frac{1}{12}x^2$



COMMENT 11

ㄱ : 함수 $g(x)$가 연속이므로 $f(2) = f(6)$이다.

ㄴ : $f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)(x-6)$이다. $2 \le x \le 6$일 때, $f(x) = \{f(x)\}^2$이면 $f(x) = 0$ 또는 $f(x) = 1$이다.

$2 \le x \le 6$일 때 교점이 3개, 밖에 2개가 나온다.

ㄷ : 교점의 개수가 홀수이려면 $f(4) = 1$이다. $f(x) = k(x-4)^2 + 1$이라 하자.

$m = 5$이려면 두 곡선 $y = f(x+4)$와 $y = \{f(x)\}^2$가 $0 < x < 2$일 때 접해야 한다.

COMMENT 12

삼각형 DAP의 넓이를 S라 하자. 삼각형 CDP의 넓이는 $2S$이고

두 삼각형 BCP와 CAP의 넓이가 서로 같으므로 삼각형 BCP의 넓이는 $3S$이다.

두 삼각형 CDP와 BCP의 넓이의 비에서 $\overline{\mathrm{DP}}:\overline{\mathrm{PB}}=2:3$이다.

또, 삼각형 ABP의 넓이는 $\frac{3}{2}S$, 삼각형 AMP의 넓이는 $\frac{3}{4}S$이므로 $\overline{\mathrm{MP}}:\overline{\mathrm{PC}}=1:4$이다.

삼각형 CDP에서 $\cos(\angle\mathrm{DCP})=\frac{1}{3}$이다. 삼각형 CAM에서 코사인을 돌리면 $\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{19}$이다.

COMMENT 13

$\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하면 $\angle\mathrm{DCE}=\angle\mathrm{CDE}=\angle\mathrm{DCE}=\theta$이다.

$\angle\mathrm{CEF}=2\theta$이므로 $\overline{\mathrm{EF}}:\overline{\mathrm{CF}}=\sqrt{5}:4$에서 $\sin\theta:\sin2\theta=\sqrt{5}:4$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$이다.

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2R$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$이다.

COMMENT 14

간격 π 이상 벌리고 두 개가 뜨려면 $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{3\pi}{2}$이다. 따라서 $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=f'\left(\frac{3}{2}\right)=16$이다.

$f'(x)=4(x-k)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)+16$에서 $f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 (또는 비율 얹으면) $k=-\frac{3}{2}$, $f'(x)=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+16$이다.

$$f\left(\frac{\beta}{\pi}\right)-f\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}f'(x)dx=5$$

이다.

※ 곡선 $y=f'(x)$가 x축에 접한다. $f'(x)=4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$이므로 $f(x)=\left(x+\frac{7}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+C$이다.

COMMENT 15

(가)에서 $f(x)$는 매개변수함수 $\begin{cases}x=\sqrt{2}at^2\\ y=\frac{1}{3}at^3-2at\end{cases}$이다. (나)에서

$$xf'(x)-f(x)=k \quad\Rightarrow\quad \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{k}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x)}{x}=-\frac{k}{x}+c$$

이므로 $f(x)=cx-k$이다. 혹은 $xf'(x)-f(x)=k$를 양 변 미분하면 $xf''(x)=0$이므로 $f''(x)=0$이다.

$x=9\sqrt{2}a$에서 미분가능이므로 $\begin{cases}3a=9\sqrt{2}ca-k\\ \frac{7\sqrt{2}}{12}=c\end{cases}$ 이고, $0\le x\le9\sqrt{2}a$에서 곡선의 길이는

$$\int_0^3\sqrt{(2\sqrt{2}at)^2+(at^2-2a)^2}\,dt=a\int_0^3(t^2+2)dt=15a$$

이다. $9\sqrt{2}a\le x$일 때 $f(x)$는 기울기가 $\frac{7\sqrt{2}}{12}$인 직선이다. $9\sqrt{2}a\le x\le(9a+6)\sqrt{2}$에서 곡선(직선)의 길이는 11이다.

COMMENT 16

조건 (나)에서 $h(b)$는 $b=3$에서 불연속이다. $b=-3$일 때도 불연속각.

함수 $k(x)=f(x)e^x$가 $x=-3$, $x=3$에서 극값을 가지므로 $f(x)=x^2-2x-7$이다.

m이 1 커질 때 $\lim_{b\to3+}h(b)$의 값은 3씩, $\lim_{b\to3-}h(b)$의 값은 1씩 커진다. $m=7$이다.