수학(상) 단원평가

도형의 방정식 [C1]

001.

두 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}$ 의 최솟값은?1)

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{3}$

002.

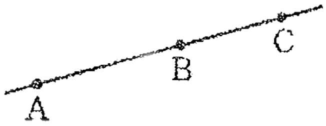
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ 8)$, $\mathrm{B}(a,\ 2)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이 y축 위에 있을 때, 상수 a의 값은?2)

① 2 ② 3 ③ 4

④ 5 ⑤ 6

003.

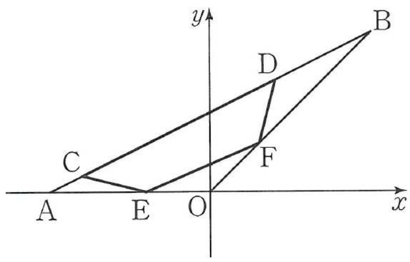
그림과 같이 일직선 위에 $2\overline{AB}=3\overline{BC}$를 만족하는 A, B, C에 공장이 있고, 세 점 A, B, C를 잇는 직선 위의 어느 한 지점에 가게를 세우려고 한다. 운반비용은 가게에서 각 공장에 이르는 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반비용을 최소로 하는 가게의 위치는?[3)]



① $\overline{AC}$의 중점
② $\overline{AB}$의 중점
③ $\overline{AB}$를 $5:1$로 내분하는 점
④ $\overline{BC}$를 $1:4$로 내분하는 점
⑤ $\overline{AB}$를 $8:1$로 내분하는 점

004.

그림과 같이 좌표평면 위에 두 점 $A(-10,\ 0)$, $B(10,\ 10)$과 선분 AB 위의
두 점 $C(-8,\ 1)$, $D(4,\ 7)$이 있다. 선분 AO 위의 점 E와 선분 OB 위의 점 F에 대하여
$\overline{CE}+\overline{EF}+\overline{FD}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 E의 x좌표는?[4)] (단, O는 원점이다.)



① -5
② $-\frac{9}{2}$
③ -4
④ $-\frac{7}{2}$
⑤ -3

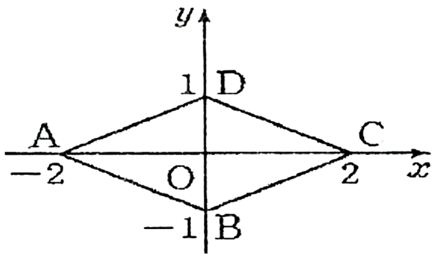
005.

좌표평면 위의 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(0,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $m:n(m>n>0)$으로 외분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OAQ의 넓이가 16일 때, $\frac{n}{m}$의 값은?[5] (단, O는 원점이다.)

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

006.

그림과 같이 좌표평면 위에 마름모 $ABCD$가 있다. 직선 $mx-y-3m+2=0$이 마름모 $ABCD$와 만나도록 하는 실수 m값의 범위가 $a \le m \le b$일 때, $3ab$의 값은?[6]
(단, a, b는 상수이다.)



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

007.

세 직선 $2x-y+4=0$, $3x-2y+6=0$, $mx-y+1=0$이 삼각형을 이루지 않도록 하는 상수 m들의 합은?7)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

008.

두 점 $\mathrm{A}(4,\ 6)$, $\mathrm{B}(-8,\ -3)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값을 구하면?8)

① 21　　② 24　　③ 27
④ 30　　⑤ 33

009.

점 $(3,\ 1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선의 기울기의 합은?9)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

010.

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(4,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $2:1$이 되도록 움직이는 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}$의 크기가 최대일 때, 선분 AP의 길이는?10)

① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4

④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

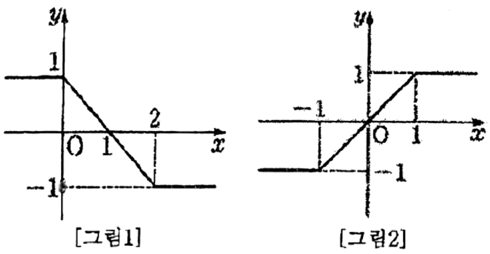
011.

세 직선 $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$, $y=mx+6(m>0)$으로 둘러싸인 삼각형 OAB가 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형일 때, 상수 m의 값은?[11)]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

012.

$y=f(x)$의 그래프가 [그림1]과 같을 때, 그래프가 [그림2]와 같은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[12)]

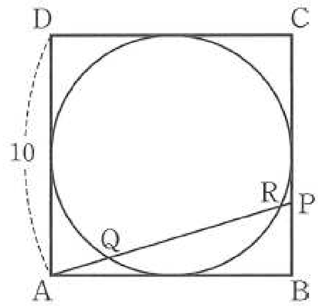


ㄱ. $y=-f(x-1)$
ㄴ. $y=-f(x+1)$
ㄷ. $y=f(-x+1)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

013.

그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 ABCD에 내접하는 원이 있다. 선분 BC를 1:2로 내분하는 점을 P라 하자. 선분 AP가 정사각형 ABCD에 내접하는 원과 만나는 두 점을 Q, R라 할 때, 선분 QR의 길이는?[13)]



① $2\sqrt{11}$　② $4\sqrt{3}$　③ $2\sqrt{13}$
④ $2\sqrt{14}$　⑤ $2\sqrt{15}$

014.

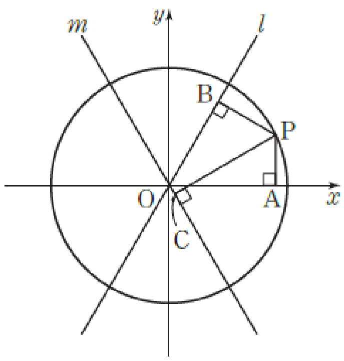
동쪽으로 시속 10km로 항해하는 배가 있다. 태풍의 중심이 이 배의 위치에서 동쪽으로 150km, 남쪽으로 100km 떨어진 해상에 위치한 태풍은 시속 20km의 속도로 북쪽으로 진행 중에 있으며, 그 중심에서 100km 이내에 폭풍우를 동반한다고 한다.
이 배가 항해를 계속한다고 할 때, 폭풍우권 내에서 항해하는 시간은?[14)]
(단, 폭풍우권 내외에 관계없이 배의 항해 속도는 같다.)

① 3시간　② 4시간　③ 5시간
④ 6시간　⑤ 7시간

015.

그림과 같이 좌표평면에서 원점을 지나는 직선 l이 x축과 이루는 각의 크기가 60°이고, 직선 l을 y축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m이 있다. 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C라 하자.

다음은 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=$ $\boxed{\text{(다)}}$ 를 구하는 과정이다. (단, 점 P는 직선 l 위에 있지 않다.)



직선 l의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$이고 직선 m의 방정식은 $y=$ $\boxed{\text{(가)}}$ x이다.

원 위의 제1사분면에 있는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면

$a>0$, $b>0$이고 $a^2+b^2=r^2$이다.

점 P에서 x축과 두 직선 l, m에 내린 수선의 발이 각각 A, B, C이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=b$,

$\overline{\mathrm{PB}}=\dfrac{|\sqrt{3}a-b|}{\boxed{\text{(나)}}}$,

$\overline{\mathrm{PC}}=\dfrac{|\sqrt{3}a+b|}{\boxed{\text{(나)}}}$

따라서 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=$ $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 s, t라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(r)$라 할 때, $f(s\times t)$의 값은?[15]

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

016.

x축, y축, 직선 $4x+3y=12$에 모두 접하는 원 중에서 반지름의 길이가 가장 작은 원과 가장 큰 원의 중심 사이의 거리는?16)

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

017.

$3(a-1)^2=(b-2\sqrt{3})^2$를 만족하는 임의의 실수 a, b에 대하여, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?17)

ㄱ. 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$의 반지름 $\sqrt{a^2+b^2}$ 의 최댓값이 존재한다.
ㄴ. $\sqrt{a^2+b^2}$ 의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.
ㄷ. $\sqrt{(a+5)^2+(b+4\sqrt{3})^2}=\sqrt{9(a+1)^2+(3b)^2}$ 을 만족하는 서로 다른 점 $(a,\ b)$가 4개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

018.

방정식 $3|x+k|=(|x|-1)(|x|-3)$이 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 상수 k의 최댓값은?[18)]

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2

④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

019.

두 원 $x^2+(y+a)^2=6$, $(x-a)^2+(y-1)^2=1$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나고 선분 PQ의 길이가 최대일 때, 양수 a의 값을 구하여라.[19)]

020.

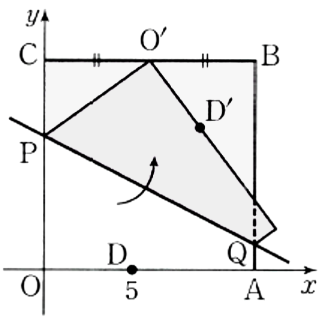
원 $x^2+y^2=36$과 직선 $y=ax+2a+4$이 만나는 두 점을 P, Q라 하고, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.[20)]
(단, a는 상수이다.)

021.

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$과 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 $(x_2,\ y_2)$에 대하여 $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하여라.[21)]

022.

그림과 같이 한 변의 길이가 12인 정사각형 OABC 모양의 종이를 점 O가 원점에, 두 점 A, C가 각각 x축, y축 위에 있도록 좌표평면 위에 놓았다. 선분 OC 위의 점 P와 선분 AB 위의 점 Q에 대하여 선분 PQ를 접는 선으로 하여 종이를 접었더니 점 O는 선분 BC의 중점 O′으로 옮겨졌을 때, 선분 OA 위의 점 D(5, 0)이 옮겨진 점을 D′$(a,\ b)$라 하자. $a+b$의 값을 구하여라.[22]



023.

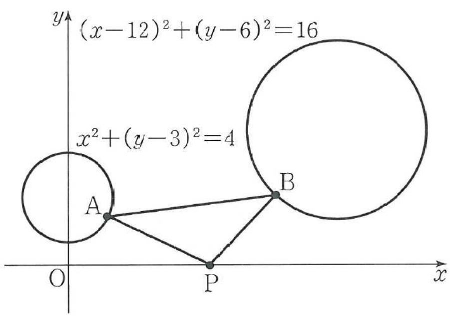
세 직선 $y=0$, $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{12}=1$, $-\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=1$로 둘러싸인 삼각형의 내심의 좌표를 I$(a,\ b)$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.[23]

024.

원 $x^2+y^2=13$과 점 $\mathrm{P}(1,\ -2)$를 지나는 직선이 두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$일 때, 직선 AB의 방정식은 $y=mx-n$이다. 상수 m, n에 대하여 $18mn$의 값을 구하여라.24)
(단, $mn\neq 0$)

025.

그림과 같은 원 $x^2+(y-3)^2=4$ 위의 점 A, 원 $(x-12)^2+(y-6)^2=16$ 위의 점 B와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값이 최소일 때, 삼각형 ABP의 넓이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.25) (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



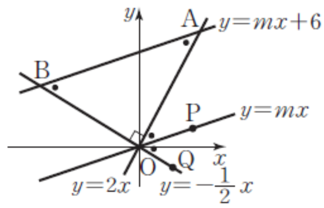
[수학(상) 단원평가]

도형의 방정식 C1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	⑤	03	⑤	04	①	05	④
06	②	07	④	08	⑤	09	③	10	②
11	③	12	④	13	⑤	14	⑤	15	②
16	⑤	17	②	18	①	19	1	20	96
21	1	22	17	23	8	24	80	25	241

11번 해설

두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$의 기울기의 곱이 -1이므로



두 직선은 서로 수직이다. 따라서 그림과 같이 원점을 지나고 직선 $y=mx+6\,(m>0)$에 평행한 직선 $y=mx$를 그리면 직선 $y=mx$는 두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$이 이루는 각을 이등분하는 직선이 된다. 점 $\mathrm{P}(1,\ m)$에서 두 직선 $y=2x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$에 이르는 거리가 같으므로 $\dfrac{|2-m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1+2m|}{\sqrt{1^2+2^2}}$이다.

17번 해설

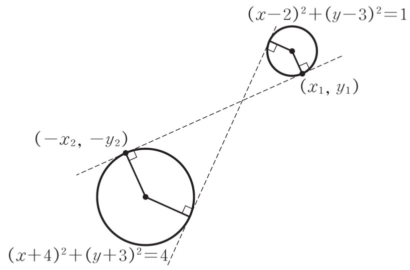
$3(a-1)^2=(b-2\sqrt{3})^2=\{\sqrt{3}(a-1)-(b-2\sqrt{3})\}\{\sqrt{3}(a-1)+(b-2\sqrt{3})\}$이므로

준 식은 두 직선 $\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$, $\sqrt{3}x+y-3\sqrt{3}=0$을 나타낸다.

ㄷ : $\sqrt{(a+5)^2+(b+4\sqrt{3})^2}=\sqrt{9(a+1)^2+(3b)^2}$은 두 점 $(-5,\ -4\sqrt{3})$, $(-1,\ 0)$에서 거리의 비가 $3:1$인 점들의 자취이므로 아폴로니우스의 원이 된다.

21번 해설

$\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}$이므로 이는 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(-x_2,\ -y_2)$ 사이의 기울기이다.



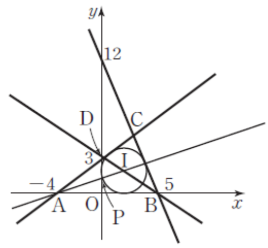
점 $(-x_2,\ -y_2)$는 원 $(x+4)^2+(y+3)^2=4$ 위의 점이다.
그림과 같이 두 원 위의 점 사이의 기울기의 최대, 최소는 공통접선의 기울기이다. 두 공통접선은 두 원의 중심 $(-4,\ -3)$과 $(2,\ 3)$을 반지름의 길이의 비인 $2:1$로 내분하는 점인 $(0,\ 1)$을 지나는 직선이다.

따라서 접선을 $y=ax+1$이라 하면 점 $(2,\ 3)$과 직선 $ax-y+1=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1이므로

$\dfrac{|2a-3+1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$에서 $3a^2-8a+3=0$이다. 두 값의 곱은 1이다.

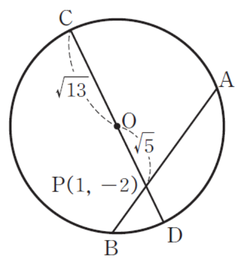
23번 해설

그림과 같이 세 직선의 교점을 A, B, C라 하고
직선 AC와 y축의 교점을 D라 하자.
$\angle$CAB의 이등분선이 y축과 만나는 점을 P라 하면
$\overline{AO}:\overline{AD}=\overline{OP}:\overline{PD}=4:5$이므로 $P\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$이다.
직선 AP의 방정식은 $x-3y=-4$이다.
마찬가지로 $\angle$CBA의 이등분선의 방정식은 $2x+3y=10$이다.



24번 해설

먼저 $\overline{AB}$를 구한다. 점 P$(1,\ -2)$와 원점을 지나는 직선이
원과 만나는 두 점을 C, D라 하자.
$\overline{OC}=\overline{OD}=\sqrt{13}$이고 $\overline{OP}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$
원의 성질에 의하여 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$이므로
$2\overline{PB}\times\overline{PB}=(\overline{OC}+\overline{OP})(\overline{OD}-\overline{OP})$ ($\because$ $\overline{PA}=2\overline{PB}$)
이다. $\overline{PB}=2$, $\overline{PA}=4$이다.



25번 해설

두 원 $x^2+(y-3)^2=4$, $(x-12)^2+(-6)^2=16$의 중심을 각각
O_1, O_2라 하고 점 O_2와 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을
각각 O_3, B$'$이라 하자. $\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이
최소일 때는 $\overline{AP}+\overline{B'P}$의 값이 최소일 때이고 선분 O_1O_3이
두 원 및 x축과 만나는 점이 A, B$'$, P일 때이다.
점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발 H에 대하여
각 선분의 길이는 $\overline{O_1O}=3$, $\overline{O_2H}=6$, $\overline{OH}=12$이고
점 P는 선분 O_1O_3을 $\overline{O_1O}:\overline{O_2H}=1:2$로 내분하는 점이므로
$\overline{OP}=4$, $\overline{PH}=8$이다. $\triangle$APB의 넓이는 $\dfrac{3}{5}\triangle O_1PO_2$이다.