수학(상) 단원평가

방정식과 부등식 [C1]

001.

x에 대한 삼차방정식

$$x^3-2x^2+x=k^3-2k^2+k$$

가 중근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?1)

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{7}{6}$　　③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{13}{6}$　　⑤ $\frac{8}{3}$

002.

임의의 자연수 n에 대하여

$$f(n)=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$$

일 때, 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?2) (단, $i=\sqrt{-1}$)

ㄱ. $f(3)=1$
ㄴ. $f(n)=0$이면 n은 4의 배수이다.
ㄷ. 임의의 자연수 n에 대하여 $f(n)=f(n+4)$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

003.

실수가 아닌 복소수 z에 대하여 $z+\dfrac{1}{z}$이 실수일 때, $z\overline{z}$의 값은?[3)]

(단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① -2　　② -1　　③ 0

④ 1　　⑤ 2

004.

이차방정식 $x^2-4x+k=0$ 의 한 근은 1과 2 사이에, 다른 한 근은 2와 3 사이에 있도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha<k<\beta$이다. 이때 $\alpha\beta$의 값은?[4)]

① 8　　② 12　　③ 14

④ 16　　⑤ 20

005.

$x^2+y^2=4$를 만족하는 실수 x, y에 대하여 $2x+y^2+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?5)

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

006.

이차식

$$2x^2+7xy+3y^2+3x-y+k$$

가 x와 y에 대한 일차식으로 인수분해 되도록 하는 실수 k의 값은?6)

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

007.

실수 a, b에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $3+i$이다.

이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\frac{\beta+2}{2\alpha}+\frac{\alpha+2}{2\beta}$의 값은?7) (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -12　② -11　③ -10

④ 11　⑤ 12

008.

x에 대한 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근 α를 가질 때,

α^3이 실수가 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 곱을 구하여라.8)

① -5　② -4　③ -3

④ -2　⑤ -1

009.

복소수 $z=(2+i)x^2+(3i-2)x-4+2i$에 대하여 $z^4<0$을 만족시킬 때,

모든 실수 x의 값의 합이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은?9) (단, $i=\sqrt{-1}$)

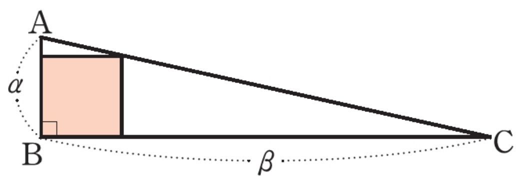
① 21 ② 22 ③ 23

④ 24 ⑤ 25

010.

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.

다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{BC}}=\beta$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형이 있다.



이 정사각형의 넓이와 둘레의 길이를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식이

$4x^2+mx+n=0$일 때, 상수 m, n에 대하여 $m+n$의 값은?10)

(단, 정사각형의 두 변은 선분 AB와 선분 BC 위에 있다.)

① -11 ② -10 ③ -9

④ -8 ⑤ -7

011.

두 복소수 α, β에 대하여 $\alpha^2 = 4i$, $\beta^2 = -4i$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[11)]

ㄱ. $\alpha\beta = 16$
ㄴ. $(\alpha+\beta)^4 = 64$
ㄷ. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$는 순허수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

012.

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{kx^2+kx+1}$이 실수가 되도록 하는 정수 k의 개수는?[12)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

013.

x, y, z에 대한 연립방정식

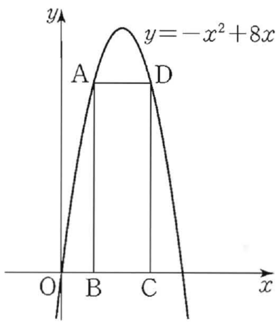
$$\begin{cases} x-9y+6z=12 \\ 2x-3y-8z=4 \\ ax+by-6z=48 \end{cases}$$

의 해가 무수히 많을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?13)

① -27 ② -18 ③ -9
④ 0 ⑤ 9

014.

그림과 같이 한 변이 x축 위에 있고, 두 꼭짓점이 이차함수 $y=-x^2+8x$의 그래프 위에 있는 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은?14)



① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

015.

두 복소수

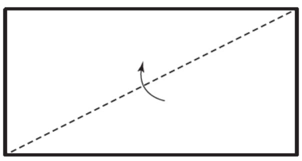
$$z=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2},\quad w=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i}{2}$$

에 대하여 $z^m \times w^n = i$를 만족시키는 두 자연수 m, n의 합 $m+n$의 최솟값은?15)
(단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

016.

다음 그림과 같이 둘레의 길이가 24인 직사각형 모양의 종이를 대각선을 접는 선으로 하여 접어보니 겹쳐진 부분의 넓이가 10이 되었다.



직사각형의 가로와 세로의 길이가 모두 자연수라 할 때, 직사각형의 긴 변의 길이는?16)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

017.

x에 대한 이차방정식 $x^2+px+1=0$이 두 실근 α, β를 가질 때,
보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[17] (단, p는 실수이다.)

ㄱ. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$
ㄴ. $0<\alpha<1$이면 $\beta>1$이다.
ㄷ. $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

018.

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여
이차함수 $f(x)=x^2+px+q$가 $f(\alpha^2)=-4\alpha$와 $f(\beta^2)=-4\beta$를 만족할 때,
두 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?.[18]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

019.

이차함수 $f(x)=x^2-2x+k$에 대하여 함수$y=f(f(x))$의 최솟값과 함수 $f(x)$의 최솟값이 서로 같도록 하는 실수 k의 최댓값은?[19)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

020.

x에 대한 일차부등식

$$|x-a[a]|<b[b]$$

의 해가 $8<x<30$일 때, 양수 a, b에 대하여 $8a+9b$의 값은?[20)]
(단, $b \geq 1$이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 63 ② 65 ③ 67
④ 69 ⑤ 71

021.

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 일차함수 $y=h(x)$에 대하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 α, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표를 β라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 최고차항의 계수는 각각 1과 4이다.
(나) 두 양수 α, β에 대하여 $\alpha : \beta = 1 : 2$

두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 x좌표가 α와 β 사이에 있는 점의 좌표를 t라 할 때, $\dfrac{t}{\alpha}$의 값은?[21)]

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

022.

두 이차함수 $f(x)=x^2-2x+a$, $g(x)=-x^2-4x+2a$에 대하여 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립하도록 실수 a의 값의 범위가 $a<p$이고, 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하도록 실수 a의 범위가 $a<q$일 때 $2pq$의 값을 구하여라.[22)]

023.

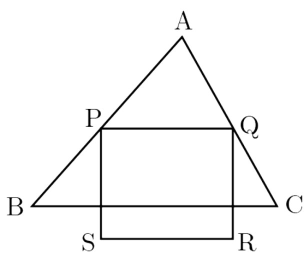
삼차방정식 $x^3-2x^2+3x-5=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때,

$$(\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)(\gamma^2-\gamma+1)$$

의 값을 구하여라.[23)]

024.

다음 그림과 같이 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 길이는 4, 면적은 6이다.



변 BC에 평행한 직선이 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. PQ를 한 변으로 하는 정사각형 PQRS를 변 SR이 삼각형 ABC의 외부에 존재하도록 꼭짓점 A와 반대편에 만든다. 이때 정사각형의 한 변의 길이 x는 $a<x<b$의 범위를 가지고, 정사각형 PQRS와 삼각형 ABC의 공통부분의 넓이 y는 최댓값 c를 가질 때, $7abc$의 값을 구하여라.[24)]

025.

실수 a에 대하여 $a \le x \le a+1$에서 이차함수 $y=-x^2+6x$의 최댓값을 $M(a)$, 최솟값 $m(a)$라 하자. 함수 $y=M(a)$, $y=m(a)$에 대하여 두 함수의 최댓값의 합을 k라 할 때, $4k$의 값을 구하여라.[25)]

[수학(상) 단원평가]

방정식과 부등식 C1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	⑤	02	⑤	03	④	04	②	05	③
06	④	07	②	08	③	09	③	10	⑤
11	④	12	⑤	13	①	14	③	15	②
16	③	17	⑤	18	②	19	②	20	⑤
21	④	22	5	23	13	24	144	25	71

5번 해설

$x^2+y^2=4$에서 $y^2=4-x^2$
이 식에서 x값의 범위를 찾아낼 수 있어야 한다.

13번 해설

두 식을 이용해 x, y, z를 한 문자에 대한 식으로 표현한 다음 a에 대한 항등식 조건을 이용한다.
※ 현재 교육과정에서 미지수가 3개이고 차수가 1차인 연립방정식을 가르치고 있지는 않지만,
나중에 세 점을 지나는 원의 방정식을 구할 때 등에 사용될 수 있으므로 공부해 놓자.

18번 해설

$x^2+x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$이 성립한다.
따라서, $f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$은 $f(-\alpha-1)=-4\alpha$, $f(-\beta-1)=-4\beta$와 같으므로
방정식 $f(-x-1)+4x=0$의 두 근이 α, β임을 이용하여 푼다.
핵심은 α, β를 두 근으로 하는 방정식을 찾아내는 것이다.

20번 해설

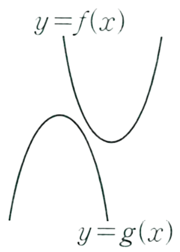
복잡해 보이지만 차근차근 해보자.
먼저 절댓값 부등식을 풀어보면
$|x-a[a]|<b[b]$에서 $a[a]-b[b]<x<a[a]+b[b]$
임을 알 수 있다. 이 부등식의 해가 $8<x<30$이므로 $a[a]-b[b]=8$, $a[a]+b[b]=30$이다.
두 식을 연립하여 $a[a]$, $b[b]$의 값을 구하고
$n\le a<n+1$, $m\le b<m+1$(단, m, n은 자연수)라고 두고 a, b를 구한다.

21번 해설

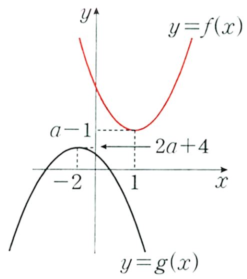
소위 차함수의 형태로 식을 setting하는 것이 바람직하다.
이차방정식 $f(x)-h(x)=0$에서
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 $x=\alpha$에서 접하므로
$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$
마찬가지로
$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$
또 $\alpha:\beta=1:2$에서 $g(x)-h(x)=4(x-2\alpha)^2$
방정식 $f(x)=g(x)$의 해가 $x=t$임을 이용하여 t를 α에 대한 식으로 나타낸다.

22번 해설

표현이 비슷해 보이지만 두 상황의 차이점을 잘 알아야한다.
임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$가 성립하는 것은 [그림1]과 같은 상황이므로
모든 x에 대하여 $f(x)-g(x)>0$이 성립할 조건을 구하는 것이고,
임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하는 것은 [그림2]와 같은 상황이므로
$f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크도록 하는 조건을 구하는 것이다.



[그림1]



[그림2]

23번 해설

$f(x)=x^3-2x^2+3x-5=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$라 하자.
$f(x)$를 x^2-x+1로 나누어보면

$$x^3-2x^2+3x-5=(x^2-x+1)(x-1)+x-4$$

$x=\alpha$를 대입하면

$$\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-5=(\alpha^2-\alpha+1)(\alpha-1)+\alpha-4=0$$

$$\therefore\ \alpha^2-\alpha+1=-\frac{\alpha-4}{\alpha-1}=-\frac{(4-\alpha)}{(1-\alpha)}$$

$$\therefore\ (\text{준 식})=-\frac{(4-\alpha)(4-\beta)(4-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}=-\frac{f(4)}{f(1)}=-\frac{39}{-3}=13$$

25번 해설

a값의 범위를 나누어 각 범위에서 $M(a)$, $m(a)$에 대한 식을 세운다.

i) $a+1<3$일 때 $M(a)=-a^2+4a+5$, $m(a)=-a^2+6a$

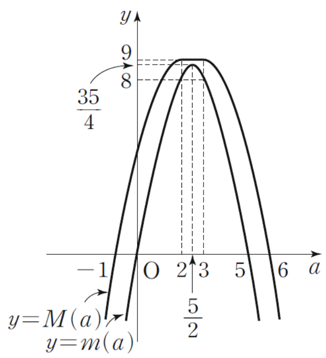
ii) $3\le a+1<\frac{7}{2}$일 때 $M(a)=f(3)=9$, $m(a)=-a^2+6a$

iii) $a=\frac{5}{2}$일 때 $M(a)=f(3)=9$, $m(a)=f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{35}{4}$

iv) $\frac{5}{2}<a\le 3$일 때 $M(a)=f(3)=9$, $m(a)=f(a+1)=-a^2+4a+5$

v) $a>3$일 때 $M(a)=f(a)=-a^2+6a$, $m(a)=f(a+1)=-a^2+4a+5$

i)~ v)로부터 함수 $y=M(a)$와 $y=m(a)$의 그래프는 오른쪽과 같다.



따라서 함수 $y=M(a)$의 최댓값은 9, 함수 $y=m(a)$의 최댓값은 $\frac{35}{4}$이다.