수학(하) 단원평가

함수와 그래프 [B2]

001.

집합 $X=\{-1,\ 1\}$과 실수 전체의 집합 Y에 대하여 다음 보기의 X에서 Y로의 함수 중 상수함수인 것만을 있는 대로 고른 것은?[1)]

ㄱ. $f(x)=x^2$
ㄴ. $f(x)=|x|$
ㄷ. $f(x)=-x+1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002.

함수 f가 $f(3x-1)=9x+5$를 만족시킬 때 $f(2)+f^{-1}(-4)$의 값은?[2)]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

003.

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$이고, X에서 X로의 함수 $f,\ g,\ h$에 대하여 $(g \circ f)(x)=h(x)$, h는 항등함수이다. $f(f(2))=1$일 때, $f(2)+g(2)$의 값은?3)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

004.

세 함수 $f(x)=2x,\ g(x)=x-4,\ h\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=2x^2-3$에 대하여 $((f \circ g) \circ h)(2)$의 값은?4)

① 18　　② 19　　③ 20
④ 21　　⑤ 22

005.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(2x+1)=6x+3$이고 $f^{-1}(x)=ax+b$일 때, $a+b$의 값은?[5] (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

006.

함수 $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$에 대하여

$$f^1=f,\quad f^{n+1}=f\circ f^n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $f^{-1}(-2)+f^{2017}(2)$의 값은?[6]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

007.

함수 $f(x)=\dfrac{qx+1}{x+p}$에 대하여 그 역함수의 그래프의 두 점근선이

$x=-1$, $y=2$

가 되도록 하는 상수 p, q의 값은?7)

① $p=-2$, $q=-1$ ② $p=-2$, $q=1$ ③ $p=1$, $q=-2$
④ $p=2$, $q=-1$ ⑤ $p=2$, $q=1$

008.

자연수 n에 대하여 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하자.
보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?8)

ㄱ. $f(2)=2$
ㄴ. $f(3^k)=k+1$ (단, k는 자연수이다.)
ㄷ. $f(a\times b)=f(a)\times f(b)$ (단, a, b는 자연수이다.)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

009.

두 집합 $X=\{x|0 \le x \le 4\}$, $Y=\{y|0 \le y \le 6\}$에 대하여 함수 $f(x)=-x^2+ax+2$가 X에서 Y로의 함수이기 위한 실수 a의 값의 범위는 $\alpha \le a \le \beta$이다. 실수 α, β에 대하여 $\alpha\beta$의 값은?[9)]

① 6　　② 8　　③ 10
④ 12　　⑤ 10

010.

두 집합 $X=\{x|x \le k\}$, $Y=\{y|y \ge 2k+12\}$에 대하여 X에서 Y로의 대응 $y=x^2-4x+5$가 일대일대응이 되도록 하는 상수 k의 값은?[10)]

① -2　　② -1　　③ 0
④ 1　　⑤ 2

011.

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+b & (x<0) \\ -x^2-2bx-a+6 & (x \ge 0) \end{cases}$의 역함수가 존재하도록 하는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값은?[11)]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

012.

함수 $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+2}$의 그래프에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?[12)]

ㄱ. 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.
ㄴ. 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.
ㄷ. $f(x)=f^{-1}(x)$가 성립한다. (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

013.

집합 $X=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 역함수가 존재하는 함수 $f:X\to X$가 다음을 모두 만족시킨다.[13]

(가) $f(10)\le 4$
(나) $5\le x\le 9$이면 $f(x)=x+1$

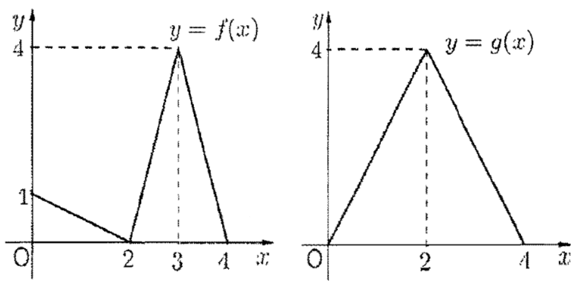
이때, 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $(f\circ f)^{-1}(7)=5$
ㄴ. $f^{-1}(x)=x$의 해의 개수의 최댓값은 3이다.
ㄷ. $f^{-1}(x)=f(x)$의 해의 개수의 최댓값은 3이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

014.

정의역이 $\{x|0\le x\le 4\}$인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같다.



이때 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 실근의 개수는?[14]

① 3개　② 4개　③ 5개
④ 6개　⑤ 7개

015.

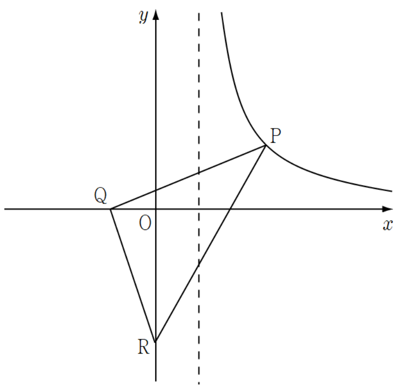
두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{y\,|\,y$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 다음 두 조건을 만족할 때, 함수 f의 개수는?15)

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.
(나) $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 3이다.

① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

016.

유리함수 $y=\dfrac{3}{x-1}(x>1)$ 위의 임의의 점 P와 점 Q$(-1,\ 0)$, R$(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR의 넓이의 최솟값은?16)



① $\sqrt{10}$　② 6　③ $2\sqrt{10}$
④ 12　⑤ 24

017.

정의역이 $\{x | 0 \le x \le 3\}$인 무리함수 $y = -2\sqrt{x+1} + a$의 최댓값이 1, 최솟값이 b일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[17)]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

018.

무리함수 $f(x) = \sqrt{ax-2} - 1\left(x \ge \dfrac{2}{a}\right)$와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$에 대하여 $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 x_1, $x_2(x_1 < x_2)$이다. $x_2 - x_1 = 2$일 때, a의 값은?[18)] (단, $a > 0$)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

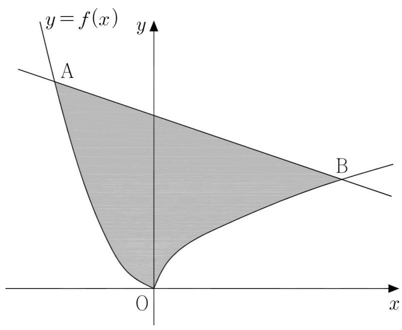
019.

$X=\{x|0\le x\le 12\}$에 대하여 $f(x)=ax+b$가 X에서 X로의 함수일 때, 다음을 만족시키는 일대일함수 f의 개수를 구하여라.19) (단, a, b는 실수이다.)

(가) $f(2)=3$
(나) $f(6)$은 정수이다.

020.

함수 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & (x\ge 0)\\ x^2 & (x<0)\end{cases}$의 그래프와 직선 $x+2y-15=0$이 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 9)$, $\mathrm{B}(9,\ 3)$에서 만난다. 그림과 같이 주어진 함수 $f(x)$의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?20) (단, O는 원점이다.)



① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

021.

함수 $y=\dfrac{2x+5}{2x-1}$ 의 그래프 위에 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구하여라.[21]

022.

정의역과 공역을 자연수 전체의 집합으로 하는 함수 f가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x=3n-2,\ n\text{은 자연수}) \\ x+1 & (x=3n-1,\ n\text{은 자연수}) \\ \dfrac{x}{3} & (x=3n,\ n\text{은 자연수}) \end{cases}$$

$f(a)=3$이 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하여라.[22]

023.

유리함수 $f(x)=\dfrac{5x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 5가 아닌 모든 실수 x에 대하여
> $$f^{-1}(x)=f(x-7)-7$$
> 이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하여
> $y=-\dfrac{5}{x}$의 그래프와 일치시킬 수 있다.

$a+b$의 값을 구하여라.[23)]

024.

일대일 대응인 함수 f가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a^2}{x-a}+a & (x>a)\\ b\sqrt{a-x}+c & (x\le a)\end{cases}$$

이때, $\left|\dfrac{b}{a}+\dfrac{2c}{b}+\dfrac{a}{c}\right|$의 최솟값은 $p\sqrt{2}+q$이다. 이때 $p+q$값을 구하여라.[24)]

(단, a, b, c는 상수, p, q는 유리수이다.)

025.

함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$에서 $f(x)=\sqrt{|x|}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다.

방정식 $f(x)=mx+\dfrac{1}{2}-2m$이 서로 다른 실근을 5개 이상 갖도록 하는 m의 값의 범위는 $\alpha<m<\beta$이다. $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$의 값을 구하여라.[25) (단, α, β는 상수이다.)

[수학(하) 단원평가]

함수와 그래프 B2 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	②	03	④	04	⑤	05	①
06	③	07	①	08	②	09	⑤	10	②
11	④	12	③	13	⑤	14	④	15	③
16	②	17	②	18	②	19	4	20	⑤
21	4	22	12	23	3	24	1	25	32

10번 해설

연속인 함수가 일대일 대응이 되려면 증가 또는 감소함수가 되어야 한다.
점 $(k,\ 2k+12)$가 그래프 위에 있어야 하므로 $k=-1$ 또는 $k=7$이다.
이 중 $k=7$인 경우는 함수가 정의되지 않는다.

16번 해설

$\triangle$PQR의 넓이가 최소인 점 P는 선분 QR에 평행한 직선이 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}$에 접할 때이다.

선분 QR의 기울기는 -3이므로 함수 $y=\dfrac{3}{x-1}$의 접선을 $y=-3x+m$이라 두고 대입,

판별식의 값이 0임을 풀면 $m=9$이다.
$\overline{\mathrm{QR}}$를 밑변으로 하는 $\triangle$PQR의 높이는 직선 $y=-3x+9$와 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 0)$ 사이의 거리이다.

20번 해설

곡선 OA를 시계방향으로 90도 회전하면 곡선 OB가 된다.

직선 AB를 시계방향으로 90도 회전하여 직선을 구해보면 점 $\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$을 지나는 직선이 된다.

선분 AB가 y축과 만나는 점을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 $\mathrm{D}\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$라 두면

주어진 도형의 넓이는 사다리꼴 OCBH의 넓이에서 삼각형 BHD의 넓이를 뺀 것과 같다.

24번 해설

함수 f가 일대일대응 함수가 되려면 점 $(a,\ a)$를 지나야 한다.
주어진 식에 a를 대입하여 정리하면 $c=a$이다.
그리고 $y=b\sqrt{a-x}+c$가 $y=a$보다 작거나 같아야 하므로 $b<0$이다.
이때 $b=-b'$라 두면 $b'>0$이고 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{2c}{b}=\dfrac{-b'}{a}+\dfrac{2a}{-b'}=-\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{2a}{b}\right)\leq-2\sqrt{2}$이다.