수학2 단원평가

다항함수의 미분법 [C1]

001.

함수 $f(x)=x^2+1$의 구간 $[a_n,\ a_{n+1}]$에서의 평균변화율이 $x=a_{n+2}$에서의 미분계수와 같다고 한다. $a_1=1$, $a_2=4$라고 할 때, $\lim_{x\to\infty}a_n$의 값은?[1] (단, $n=1,\ 2,\ 3\cdots$)

① 3　② 5　③ 6
④ 8　⑤ 10

002.

삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a\le x<b) \\ n+f(x) & (x\ge b)\end{cases}$$ 로 정의한다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b와 m, n의 값을 정할 때 $m+n$의 값은?[2]

① 64　② 103　③ 118
④ 120　⑤ 135

003.

최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$를 만족시킨다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{xg'(x)}=2$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x}=1$일 때, $f(2)+g(3)$의 값은?3)

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

004.

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.4)
(단, a, b, c는 상수이다.)

(가) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=5$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선의 기울기는
$x=-1$인 점에서 최소이다.

005.

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $2x^2f(x)=(x^3-1)f'(x)+2x$이다.

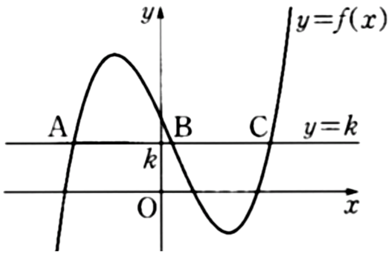
이때 $100f'(1)$의 값을 구하여라.5)

006.

다항식 $f(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지고, $x-2$로 나누면 나머지가 2이다. $f(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나눈 나머지를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{h\to 0}\frac{g(2+2h)-g(2-h)}{h}$의 값을 구하여라.6)

007.

곡선 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$와 직선 $y=k$가 세 점 A, B, C에서 만난다.
다음 중 곡선 $y=f(x)$위의 점 A에서의 접선의 기울기를 나타내는 것은?7)



① $\overline{AB}\times\overline{AC}$　② $\overline{AB}\times\overline{BC}$　③ $\overline{AC}\times\overline{BC}$
④ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$　⑤ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

008.

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선을 l이라 하고, 직선 l이 직선 $y=-2$와 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$에 그은 접선 중에서 직선 l이 아닌 직선을 m이라 할 때, 직선 m의 기울기는?8)

① -3　② -2　③ -1
④ 1　⑤ 2

009.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}x$의 그래프가 세 점에서 만날 때, 세 교점을 왼쪽부터 차례로 A, B, C라 하자. 두 점 A, C에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기가 각각 $\frac{11}{3}$, $\frac{17}{3}$일 때, 점 B에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는?[9)]

① $-\frac{5}{4}$ ② $-\frac{29}{24}$ ③ $-\frac{7}{6}$
④ $-\frac{9}{8}$ ⑤ $-\frac{13}{12}$

010.

곡선 $y=ax^3+bx\ (a\neq0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점을 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$이라 할 때, x_0과 x_1의 관계식으로 옳은 것은?[10)]

① $x_0+x_1=0$ ② $2x_0+x_1=0$ ③ $x_0+2x_1=0$
④ $x_0-x_1=0$ ⑤ $2x_0-x_1=0$

011.

점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=x^n(x>0)$에 그은 접선의 기울기를 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}\log g(n)$의 값을 구하여라.11) (단, n은 2 이상의 자연수이다.)

012.

삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a+3)x+b$가 다음 조건을 만족시키는 두 실수 $a,\ b$에 대하여 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$가 나타내는 도형의 길이는?12)

(가) 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다.

(나) $f(1)=\frac{4}{3}$

① 12 ② $4\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{11}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{13}$

013.

실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(t,\ t^3)$과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리를 $g(t)$라 하자. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[13)]

ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(t)$는 0이 아닌 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

014.

삼차함수 $f(x)=k(x+1)(x-a)(x-a-3)\ (k>0)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 10이다.

두 상수 a, k에 대하여 ak의 값은?[14)]

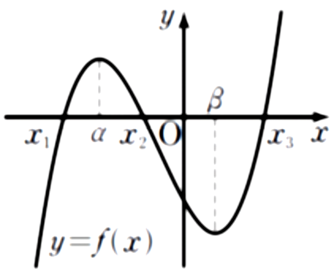
① -16 ② -14 ③ -12
④ -10 ⑤ -8

015.

함수 $f(x)=x^{n+1}(x-1)^2\ (x>0)$이 구간 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{5}\right)$에서 극댓값을 가질 때, 자연수 n의 최댓값을 구하여라[15)]

016.

다음 그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 점 $(x_1,\ 0)$, $(x_2,\ 0)$, $(x_3,\ 0)$에서 x축과 만나고 서로 다른 두 점 α, β에서 각각 극댓값과 극솟값을 갖는다. $\alpha\beta=-3$일 때, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$의 값은?[16)]



① -9　② -6　③ -3
④ 0　⑤ 3

017.

두 자연수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$는 극댓값과 극솟값을 모두 가지며 극댓값은 음수이다. 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ -2)$를 지날 때, $f(3)$의 값을 구하여라.17)

018.

삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분 가능할 때,
옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?18)

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \le 0$
ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

019.

삼차방정식 $x^3-ax^2+5x-2=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 모든 실수 t에 대하여 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수는?[19)]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

020.

자연수 k에 대하여 삼차방정식 $x^3-12x+22-4k=0$의 양의 실근의 개수를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값을 구하여라.[20)]

021.

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$가

$$f(-1)>0, \quad \{f(1)\}^2+\{f'(-1)\}^2+\{f'(1)\}^2=0$$

을 만족할 때, 사차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값은?[21)]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

022.

좌표평면에서 두 함수 $f(x)=6x^3-x$, $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?[22)]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

023.

좌표평면 위의 점 $(0,\ t)$를 지나고 곡선 $y=x^3-ax^2+3x-5$(a는 자연수)에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(t)$라 할 때, $g(t)=(f\circ f)(t)$라 하자.
다음 조건을 만족시키는 a의 최솟값을 m이라 할 때, $m+g(m)$의 값은?[23)]

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)>1$이다. (나) 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 4　　② 6　　③ 8
④ 10　　⑤ 12

024.

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $f(0)+f'(0)=0$ (나) $x\leq 1$에서 $f(x)+f'(x)\geq 0$이다. (다) $f(3)\leq -7$

이때 $f(-1)$의 값을 구하여라.[24)]

025.

택시 A가 손님을 태우고 원점을 출발하여 정남쪽으로 매시 $50\sqrt{3}\,\mathrm{km}$의 속도로 출발한 지 4시간 후에 택시 B가 원점에서 출발하여 정동쪽으로 매시 $100\mathrm{km}$의 속도로 출발하였다. 택시 B가 출발 후 $400\mathrm{km}$의 위치를 통과할 때, 택시 A, B가 서로 멀어지는 속도는?[25)]

① $50\mathrm{km/h}$　② $10(3\sqrt{3}+5)\mathrm{km/h}$　③ $125\mathrm{km/h}$
④ $10(5\sqrt{3}-3)\mathrm{km/h}$　⑤ $10(5\sqrt{3}+3)\mathrm{km/h}$

[수학2 단원평가]

다항함수의 미분법 C1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	①	02	③	03	①	04	3	05	200
06	12	07	①	08	②	09	②	10	②
11	10	12	②	13	③	14	④	15	6
16	①	17	78	18	②	19	②	20	13
21	④	22	④	23	④	24	21	25	③

12번 해설

조건 (가)에서 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이므로

모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=x^2+2ax+2a+3\geq 0$이다.

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+2a+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(2a+3)\leq 0$, $a^2-2a-3\leq 0$, $(a+1)(a-3)\leq 0$, $-1\leq a\leq 3$ $\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 $f(1)=\frac{1}{3}+a+(2a+3)+b=\frac{4}{3}$, $b=-3a-2$ $\cdots$ ㉡

14번 해설

$f(x)=k(x+1)(x-a)(x-a-3)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=a$ 또는 $x=a+3$이다.

조건 (가)를 만족시키기 위해서는 $a=-1$ 또는 $a+3=-1$이다.

Case1) $a=-1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고

극댓값은 $f(-1)=0$이므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

Case2) $a+3=-1$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고

극댓값은 $f(-3)=4k$이다. 조건 (나)에서 $4k=10$이므로 $k=\frac{5}{2}$이다.

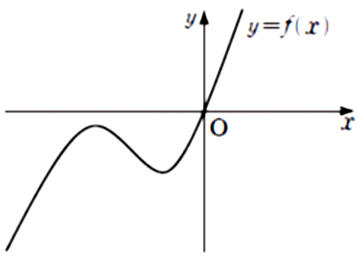
17번 해설

극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$이

서로 다른 두 실근을 갖는다. 판별식을 D_1이라 하면 $\frac{D_1}{4}=a^2-3b>0$이다.

$f(x)=x(x^2+ax+b)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점 O를 지나고

극댓값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 방정식 $x^2+ax+b=0$은 실근을 갖지 않으므로

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면 $D_2=a^2-4b<0$이다.

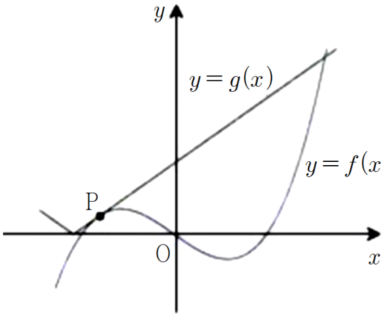
따라서 $3b<a^2<4b$이고 $y=f(x)$가 점 $(-1, -2)$를 지나므로 $a=b-1$이다.

22번 해설

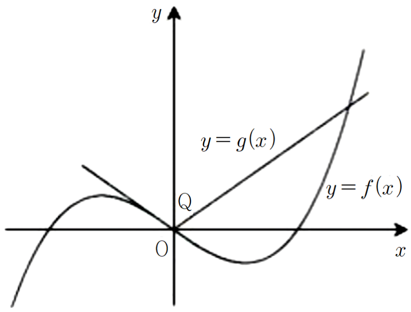
두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.

Case1) 직선 $g(x)=x-a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 P에서 접하는 경우

Case2) 직선 $g(x)=-x+a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 Q에서 접하는 경우



Case1)



Case2)

23번 해설

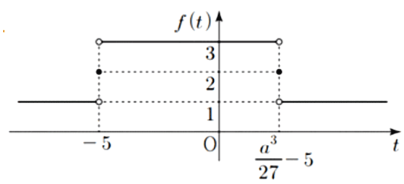
곡선 $y=x^3-ax^2+3x-5$ 위의 점 $(k,\ k^3-ak^2+3k-5)$에서의 접선이 점 $(0,\ t)$을 지난다고 하자.

$y'=3x^2-2ax+3$이므로 접선의 방정식은 $y=(3k^2-2ak+3)(x-k)+k^3-ak^2+3k-5$이고,

이 접선이 점 $(0,\ t)$를 지나므로 $t=-2k^3+ak^2-5$와 직선 $y=t$의 교점의 개수이다.

$h(k)=-2k^3+ak^2-5$라 하면, $h(x)$는 두 극값 $h(0)=-5$, $h\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}-5$를 가지므로

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (t<-5) \\ 2 & (t=-5) \\ 3 & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right) \\ 2 & \left(t=\frac{a^3}{27}-5\right) \\ 1 & \left(t>\frac{a^3}{27}-5\right) \end{cases}$$



$$g(t)=f(f(t))=\begin{cases} f(1) & (t<-5) \\ f(2) & (t=-5) \\ f(3) & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right) \\ f(2) & \left(t=\frac{a^3}{27}-5\right) \\ f(1) & \left(t>\frac{a^3}{27}-5\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$에서

$\frac{a^3}{27}-5<3$인 경우, $\frac{a^3}{27}-5=3$인 경우, $\frac{a^3}{27}-5>3$인 경우로

나누어 살펴보면, a의 범위는 $a^3>8\times27=6^3$이고, 자연수 a의 최솟값은 $m=7$이다.