수학2 단원평가

다항함수의 미분법 [B1]

001.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기가 2일 때,

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 f(2)-4f(x)}{x-2}$의 값을 구하여라.1)

002.

자연수 n에 대하여 구간 $[n,\ n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $n+3$이다.
이때 함수 $y=f(x)$의 구간 $[1,\ 80]$에서의 평균변화율은?2)

① 41 ② 42 ③ 43
④ 44 ⑤ 45

003.

함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n} x^k$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=39$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.3)

004.

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$$

를 만족시키고 $f'(1)=2$일 때, $f'(2)$의 값을 구하여라.4)

005.

다항함수 $f(x)$에 대하여 두 집합 A, B를 아래와 같이 정의할 때, 다음 중 옳은 것은?[5)]

$$A=\left\{a \mid \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\text{가 존재한다.}\right\},\qquad B=\left\{a \mid f(a)=\lim_{x\to a}f(x)\right\}$$

① $A\subset B$　② $B\subset A$　③ $A=B$
④ $A\cap B\neq 0$　⑤ $A=B^c$

006.

상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(x+4)f'(x)=2\{f(x)+16\}$이다.
(나) $f(0)=0$

$f(1)+f'(1)$의 값은?[6)]

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

007.

다항함수 $f(x)$를 $(x-3)(x-4)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 0이다.
$\lim_{x \to 4}\frac{f(x)-f(4)}{\sqrt{x}-2}=12$일 때, $Q(4)$의 값은?7)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 6

008.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=(x-1)^3 f(x)-7$
(나) $\lim_{x \to 3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3,\ g(3))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, $14a+7b$의 값을 구하여라.8) (단, a, b는 상수이다.)

009.

곡선 $y=x^3+2x$ 위의 임의의 점 $(a,\ a^3+2a)$에서의 접선의 y절편을 $g(a)$라고 할 때, $\lim_{a\to\infty}\frac{g(a+1)-g(a)}{a^2}$의 값은?[9)]

① -12　② -6　③ 0
④ 6　⑤ 12

010.

삼차곡선 $f(x)=x^3-ax^2+ax+3$은 실수 a값에 관계없이 항상 두 점 A, B를 지난다. 이 두 점 A, B에서 곡선 $f(x)$에 접하는 접선이 수직이 되기 위한 a값들의 합은?[10)]

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4
④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

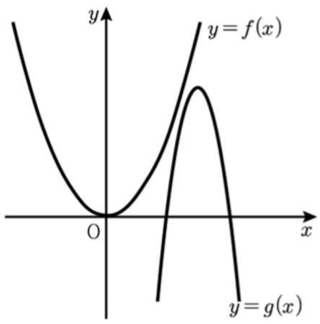
011.

곡선 $y=x^3-ax^2+5x+1$에 접하고 $y=2x-1$에 평행한 직선이 존재하지 않도록 하는 모든 정수 a의 개수는?11)

① 5　② 4　③ 3
④ 2　⑤ 1

012.

두 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$과 $g(x)=-2(x-6)^2+k$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(3,\ 3)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점을 Q, 곡선 $y=g(x)$와 x축이 만나는 두 점을 각각 R, S라 할 때, 삼각형 QRS의 넓이는?12) (단, $k>0$)



① 16　② $4\sqrt{17}$　③ $12\sqrt{2}$
④ 20　⑤ $5\sqrt{17}$

013.

점 $\mathrm{A}(0,\ -16)$에서 곡선 $y=x^2-4x$에 그은 두 접선의 접점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$이다. 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+3b$의 값은?13)

① 12　② 14　③ 16
④ 18　⑤ 20

014.

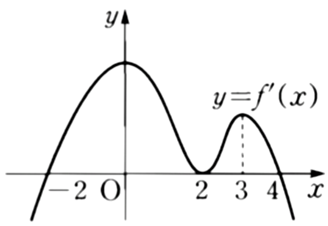
미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $f(1)$의 최댓값과 최솟값의 합의 값은?14)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\lvert f'(x)\rvert \le 3$ (나) $f(0)=2$

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

015.

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?15) (단, $f(-2)=0$이다.)

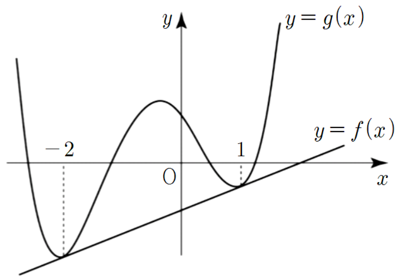


ㄱ. $f(x)$는 $x=4$일 때 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f(x)$는 구간 $(0,\ 2)$에서 감소한다.
ㄹ. $f(x)$의 그래프는 $x=-2$에서 x축에 접한다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

016.

그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 $-2,\ 1$인 두 점에서 접한다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값은?16)



① $\frac{81}{16}$ ② $\frac{83}{16}$ ③ $\frac{85}{16}$
④ $\frac{87}{16}$ ⑤ $\frac{89}{16}$

017.

함수 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2ax^2+(2a^2-8)x$의 극댓값이 0이고 $f(1)<0$일 때, $f(3)$의 값은?[17) (단, a는 상수이다.)

① -12 ② -14 ③ -16
④ -18 ⑤ -20

018.

미분가능한 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 1을 갖는다. $g(x)=(2x+1)f(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=-2$인 점에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?[18)]

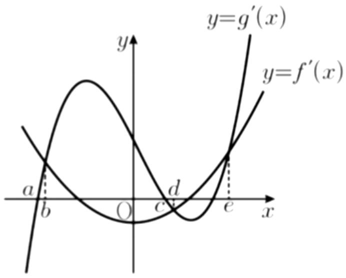
① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

019.

삼차함수 $y=f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대가 된다.
$\alpha+\beta=4$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합을 구하여라.19)

020.

삼차함수 $f(x)$와 사차함수 $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 $h(x)=f(x)-g(x)$가 극소인 x의 값은?20)



① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

021.

곡선 $y=27-3x^2$과 x축과의 교점을 A, B라 하고, 선분 AB와 이 곡선으로 둘러싸인 부분에 사다리꼴 ABCD를 내접시킬 때, 그 면적의 최댓값을 구하여라.[21]

022.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하여라.[22]

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-4}{x-1}=0$

(나) 곡선 $y=f(x)$은 원점을 지나고 x축과의 교점의 개수는 2이다.

023.

두 함수 $f(x)=4x^3+12x^2-2x$, $g(x)=2x^3+12x^2+4x+a$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?[23)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

024.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 최솟값은?[24)]

(가) 모든 실수 x에 대하여, $f(-x)=f(x)$
(나) $f'(1)=20$
(다) 모든 실수 x에 대하여, $f(x)\geq f'(x)$

① 12 ② 16 ③ 20
④ 24 ⑤ 28

025.

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=t^4-8t^3$, $g(t)=2at$이다. $t>0$에서 두 점 P, Q의 속도가 서로 같을 때가 두 번이기 위한 정수 a의 최솟값은?[25)]

① -64　② -63　③ -62
④ -61　⑤ -60

[수학2 단원평가]

다항함수의 미분법 B1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	4	02	③	03	12	04	3	05	①
06	②	07	③	08	27	09	②	10	①
11	①	12	②	13	③	14	③	15	④
16	①	17	④	18	②	19	6	20	④
21	96	22	20	23	③	24	②	25	②

12번 해설

접선 l의 방정식은 $y=2x-3$이다.

접점 Q의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b=2a-3$이고, 직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접하므로

$g'(x)=-4x+24$, $g'(a)=-4a+24=2$

이다. $a=\frac{11}{2}$, $b=8$이고 점 $\mathrm{Q}\left(\frac{11}{2},\ 8\right)$이다. $g\left(\frac{11}{2}\right)=8$이므로 $k=\frac{17}{2}$,

원점으로부터 가까운 점을 R라 하면 $\mathrm{R}\left(6-\frac{\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{Q}\left(6+\frac{\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$이다.

17번 해설

(i) $a=-4$일 때, $f(x)=\frac{2}{3}x^3+8x^2+24x$이다.

$f(1)=\frac{2}{3}+8+24>0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $a=2$일 때, $f(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2$이다.

$f(1)=-\frac{10}{3}<0$이므로 주어진 조건을 만족한다.

19번 해설

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$라 놓으면 $f(x)=0$의 모든 근의 합은

근과 계수와의 관계에 의하여 $-\frac{b}{a}$이다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 두 근이 α, β이므로 $\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}=4$이다.

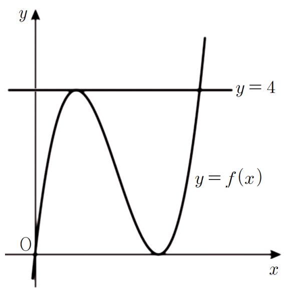
22번 해설

이때 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$이라 하면 $f(0)=0$이므로

$c=0$이고, $f(1)=4$이므로 $1+a+b=4$이다.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 $f'(1)=0$이므로 $3+2a+b=0$

두 식 $1+a+b=4$, $3+2a+b=0$을 연립하여 해결.



24번 해설

조건 (가)에 의하여 $f(x)=x^4+ax^2+b$, $f'(x)=4x^3+2ax$

조건 (나)에서 $f'(1)=4+2a=20$이므로 $a=8$

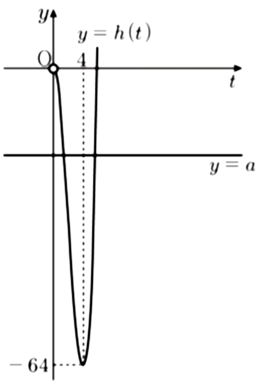
조건 (다)에 의해서 $x^4+8x^2+b \geq 4x^3+16x$이고 이를 풀면 $b \geq 16$이다.

25번 해설

두 점 P, Q의 속도가 서로 같을 때가 두 번이기 위해서

$t>0$에서 방정식 $4t^3-24t^2=2a$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식은 $2t^3-12t^2=a$과 같다. 이때 $h(t)=2t^3-12t^2$이라 하면



이므로 서로 다른 두 점에서 만나려면 $-64<a<0$이다.