수학2 단원평가

함수의 극한 [B1]

001.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & (x\text{는 유리수}) \\ -x^3 & (x\text{는 무리수})\end{cases}$$

일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?[1] (단, n은 자연수이다.)

① $\lim_{n\to\infty} f\left(-1-\frac{1}{n}\right)=1$

② $\lim_{n\to\infty} f\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{n}\right)=1$

③ $\lim_{n\to\infty} f\left(2-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)=-8$

④ $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

⑤ $\lim_{x\to 1} f(x)=-1$

002.

함수 $f(x)=\begin{cases}3-x & (|x|\geq 1) \\ 3-x^2 & (|x|<1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하지 않을 때, 상수 a의 값을 구하여라.[2]

① -1　② -2　③ -3

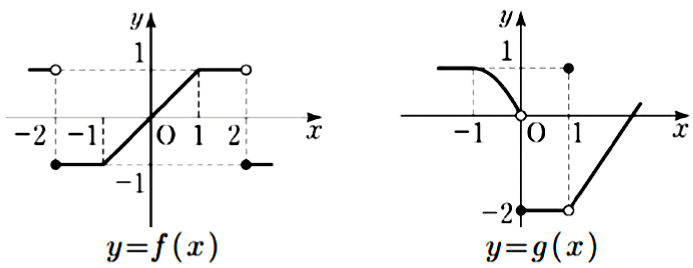
④ -4　⑤ -5

003.

$0 < a < 3$일 때, $\lim_{x \to 3} \frac{|x^2 - a| + a - 9}{x - 3}$의 값을 구하여라.3)

004.

두 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 일부가 다음 그림과 같고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?4)



(가) $\lim_{x \to 0} g(f(x)) = -2$

(나) $\lim_{x \to 2} g(f(x)) = 1$

(다) $\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k + \frac{1}{x}\right)\right) = -2$

① (가) ② (나) ③ (다)
④ (나), (다) ⑤ (가), (나), (다)

005.

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to -2} \frac{f(x+2)}{x^2+x-2} = 3$일 때, $\lim_{x \to 0} \frac{xf(x) - f(x)}{2x^2+3x}$의 값은?5)

① -3　② $-\frac{1}{3}$　③ 0

④ $\frac{1}{3}$　⑤ 3

006.

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것을 보기에서 있는 대로 고른 것은?6)

(가) $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$가 존재하면 $\lim_{x \to a} g(x)$도 존재한다.

(나) $\lim_{x \to a} g(x)$, $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$가 존재하면 $\lim_{x \to a} f(x)$도 존재한다. (단, $g(x) \neq 0$)

(다) $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재하면 $\lim_{x \to a} f(g(x))$도 존재한다.

① (가)　② (나)　③ (가), (다)

④ (나), (다)　⑤ (가), (나), (다)

007.

$\lim_{x \to \infty} (3x-1)\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^{10} + \left(\frac{2}{x}\right)^{9} + \cdots \left(\frac{9}{x}\right)^{2} + \left(\frac{10}{x}\right)\right\}$의 값은?7)

① -10　② 3　③ 10

④ 20　⑤ 30

008.

$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} = 3$이고, $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right) = 2$일 때, $a+b$의 값은?8)

(단, a, b는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0

④ 1　⑤ 2

009.

함수 $f(x)=x^2+4x+4$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty} n^2\left\{f\left(\frac{2}{n}+1\right)-f(1)\right\}^2$의 값을 구하여라.9)

010.

함수 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{ax^2+bx+c}$가

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{3},\quad \lim_{x\to-1}|f(x)|=\infty,\quad \lim_{x\to5}|f(x)|=\infty$$

을 모두 만족시킬 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?10)

① -24 ② -18 ③ -12
④ -6 ⑤ 6

011.

다항함수 $f(x)$에 대하여

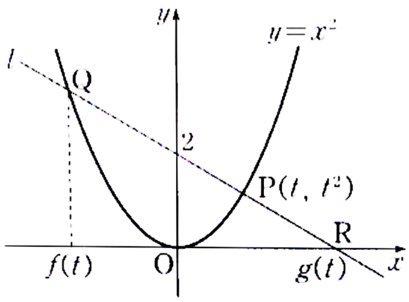
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+5}=2,\quad \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=3,\quad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=p$$

일 때, 실수 p의 값은?11)

① 6　② 9　③ 12
④ 15　⑤ 18

012.

그림과 같이 y축 위의 점 $(0,\ 2)$와 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ t^2\right)\left(0<t<\sqrt{2}\right)$를 지나는 직선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하고, 직선 l이 x축과 만나는 점을 R라 하자. 두 점 Q, R의 x좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\lim\limits_{x\to0+}f(t)g(t)$의 값은?12)



① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

013.

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x}}}$이 불연속이 되는 실수 x의 개수는?13)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

014.

함수 $f(x)=\begin{cases} 3 & (x \le -3) \\ x & (-3 < x < 3) \\ -3 & (x \ge 3) \end{cases}$일 때, 다음 보기 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?14)

(가) $\lim\limits_{x\to 3+}\{f(x)-f(-x)\}=-6$
(나) 함수 $f(x)+f(-x)$는 $x=3$에서 연속이다.
(다) 함수 $f(x)+f(-x)$는 실수 전체에서 연속이다.

① (가)　② (가), (나)　③ (가), (다)
④ (나), (다)　⑤ (가), (나),(다)

015.

함수 $f(x)=\begin{cases} 4-2x & (|x|\geq 1) \\ ax+a^2 & (|x|<1) \end{cases}$이 $x=1$에서 연속이고,

$x=-1$에서 불연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?15)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

016.

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}$의 값이 존재한다.

함수 $f(x)$를 $f(x)=x^2g(x)-4g(x)+x-2$로 정의할 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)g(x)}{x-2}$의 값은?16)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

017.

두 함수 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x \neq -1) \\ 1 & (x=-1)\end{cases}$, $g(x)=3x+k$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?17)

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

018.

다항함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}[x] & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x<-1,\ x>1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다. $f(4)$의 값을 구하여라.18)
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3+x-1}=2$
(나) 모든 실수 x에서 함수 $f(x)g(x)$는 연속이다.

019.

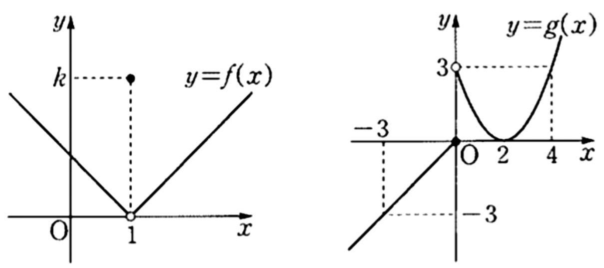
두 함수 $f(x)=\begin{cases}-5 & (x<5)\\ -x^2+4x+2 & (x\geq 5)\end{cases}$와 $g(x)=ax+1$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[19]

① $-\dfrac{1}{5}$ ② $-\dfrac{1}{3}$ ③ $-\dfrac{2}{5}$

④ $-\dfrac{3}{5}$ ⑤ $-\dfrac{2}{3}$

020.

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $y=(g\circ f)(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.[20]



021.

모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 $(x-3)f(x)=3x^2+ax+b$를 만족시키고 $f(1)=2$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.[21]

022.

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} & (x \neq 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $(x^2+ax+b)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $b-a$의 값은?[22] (단, a, b는 상수이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

023.

실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 무리함수 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프의 교점의 개수를 $f(m)$이라 하면 함수 $f(m)$은 $m=a$, $m=b$에서 불연속이다. $a+b$의 값은?[23] (단, $a<b$)

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

024.

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 $x=-3$, $x=5$에서 불연속이다.

(나) $\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}=16$

이때, $f(2)$의 값을 구하여라.[24]

025.

연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(-2)=2$, $f(-1)=3$, $f(0)=2$, $f(1)=1$일 때,
방정식 $x^2f(x)-1=-2x$는 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 n개의 실근을 갖는다.
이때, n의 값을 구하여라.[25)]

[수학2 단원평가]

함수의 극한 B1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	①	02	①	03	6	04	④	05	⑤
06	②	07	⑤	08	③	09	144	10	①
11	④	12	②	13	⑤	14	⑤	15	④
16	④	17	⑤	18	120	19	①	20	4
21	8	22	④	23	②	24	30	25	2

4번 해설

(다) $f(x+4)=f(x)$이므로 주기가 4인 주기함수를 이용하여 정리하면

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(4+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(6+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(8+\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$
$$=2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(4+\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$
$$=2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$

이젠 합성합수의 극한을 이용하여 계산하면 끝!

7번 해설

$\frac{1}{x}=t$라 하면 $x=\frac{1}{t}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}(3x-1)\left\{\left(\frac{1}{x}\right)^{10}+\left(\frac{2}{x}\right)^{9}+\cdots+\left(\frac{9}{x}\right)^{2}+\left(\frac{10}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{3-t}{t}\{t^{10}+(2t)^9+\cdots+(9t)^2+10t\}$$
$$=\lim_{t\to 0}(3-t)(t^9+2^9\cdot t^8+\cdots+9^2\cdot t+10)=30$$

12번 해설

직선 l의 방정식은 $y=\left(t-\frac{2}{t}\right)x+2$이므로 $\mathrm{R}\left(\frac{2t}{2-t^2},\ 0\right)$이다.

직선 l은 곡선 $y=x^2$과 두 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$, Q에서 만나므로

$x^2=\left(t-\frac{2}{t}\right)x+2$이고 계산하면 $\mathrm{Q}\left(-\frac{2}{t},\ \frac{4}{t^2}\right)$이다.

18번 해설

$f(x)$는 삼차항의 계수가 2인 삼차함수이고 $f(-1)=f(0)=f(1)=0$이므로
$f(x)=2x(x-1)(x+1)$이다.

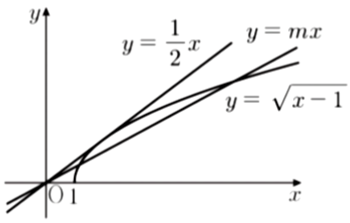
23번 해설

직선과 무리함수의 그래프는 [그림1]과 같다.

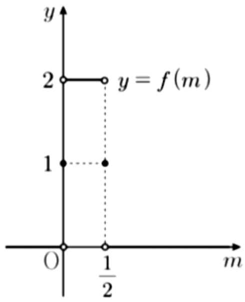
$mx=\sqrt{x-1}$, $m^2x^2=x-1$, $m\neq 0$일 때,

$D=(-1)^2-4m^2=0$에서 $m=\pm\frac{1}{2}$이다.

$f(m)$의 그래프는 [그림2]와 같다.



[그림1]



[그림2]

24번 해설

조건 (가)에서 $f(x)=a(x+3)(x-5)\,(a\neq 0)$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to -3}\frac{a(x+3)(x-5)}{x+3}=16$에서 $a=-2$이다.

따라서 $f(x)=-2(x+3)(x-5)$이므로 $f(2)=-2\cdot 5\cdot(-3)=30$