수1 단원평가

수열 [C1]

001.

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1$, $a_5 = b_7$, $b_{22} = 10$일 때 $a_k = 10$을 만족시키는 양의 정수 k의 값은?[1) (단, $a_1 \neq 10$)

① 12 ② 14 ③ 15
④ 21 ⑤ 22

002.

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $\dfrac{S_4}{S_2} = 10$일 때, $\dfrac{a_6}{a_4}$의 값은?[2)]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

003.

일반항이 $a_n = 2n+1$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$는 $A_1 = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 집합 A_k는 수열 $\{a_n\}$의 항들 중 $(2k+3)$개의 연속한 항들을 원소로 하는 집합이다.
> (나) 집합 A_{k+1}의 가장 작은 원소는 집합 A_k의 가장 작은 원소보다 크다.
> (다) $n(A_k - A_{k+1}) = 3$

예를 들어 $A_2 = \{9,\ 11,\ 13,\ \cdots,\ 21\}$이다. $A_{15} \cap A_p = \varnothing$을 만족하는 15보다 큰 자연수 p의 최솟값을 구하여라.[3)]

004.

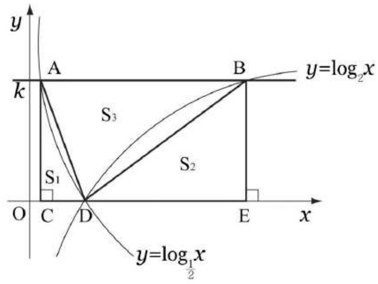
$0 < x < 2\pi$에서 방정식 $\cos^2 x + a\sin x - \sin^2 x - 1 = 0$의 실근을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 그 순서대로 등차수열을 이룬다고 할 때, 상수 a의 값은?[4)]
(단, $0 < a < 2$)

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　③ 1

④ $\sqrt{2}$　　⑤ $\sqrt{3}$

005.

그림과 같이 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$가 직선 $y=k$와 만나는 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, E라 하자. $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 $y=\log_2 x$의 교점 D에 대하여 $\triangle$ACD, $\triangle$BDE, $\triangle$ADB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, S_1, S_2, S_3은 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 양수 k의 값은?[5)]



① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1
④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

006.

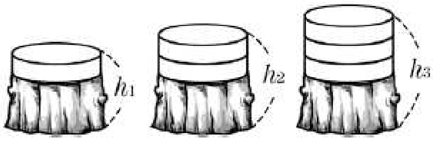
등차수열 59, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 32의 합이 455일 때, 등차수열

59, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 32, $\cdots$

은 첫째항부터 제p항까지의 합이 최대이고 그때의 최댓값이 q이다. 이때 $p+q$의 값을 구하여라.[6)]

007.

높이가 서로 같은 원판을 나무통 위에 올려 놓으려고 한다. 그림과 같이 원판을 1개 올려 놓았을 때의 전체 높이를 h_1, 2개 올려 놓았을 때의 전체 높이를 h_2, 3개 올려 놓았을 때의 전체 높이를 h_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 n개 올려 놓았을 때의 전체 높이를 h_n이라 하자. $h_{15}=6$일 때, $h_5+h_{13}+h_{17}+h_{25}$의 값을 구하여라.7)



008.

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2$일 때,
$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2003}-a_{2004}$의 값은?8)

① -2004 ② -2002 ③ 0
④ 2002 ⑤ 2004

009.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
수열 $\{a_n\}$과 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $S_k > S_{k+1}$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k에 대하여
> $S_k = 98$이다.
> (나) $a_9 = -a_6$이고 $a_6 a_7 a_8 < 0$이다.

a_3의 값을 구하여라.9)

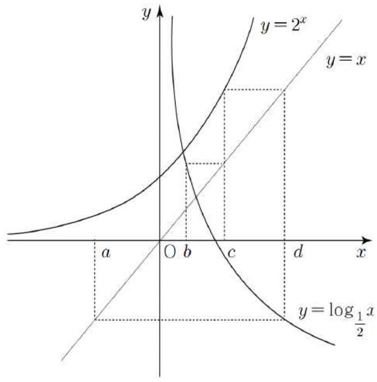
010.

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 2\sqrt{3}$, $a_4 : a_7 = 1 : 3\sqrt{3}$일 때, a_8의 값은?10)

① $6\sqrt{3}$ ② 18 ③ $18\sqrt{3}$
④ 54 ⑤ $54\sqrt{3}$

011.

그림은 세 함수 $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=x$의 그래프와 $a<0<b<c<d$인 네 실수 a, b, c, d의 관계를 나타낸 것이다. 세 수 b, $2c$, $5d$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a의 값은?[11] (단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



① $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　② $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　③ -1
④ $-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

012.

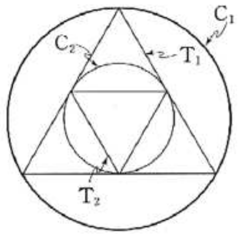
서로 다른 세 자연수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?[12]

(가) a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $b-a=n^2$ (단, n은 자연수이다.)
(다) $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=3$

① 26　② 28　③ 30
④ 54　⑤ 34

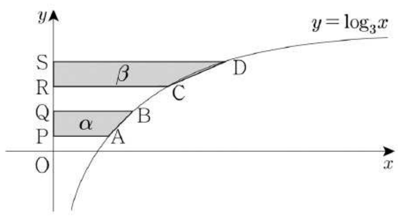
013.

다음 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 C_1이 있다. 원 C_1에 내접하는 정삼각형 T_1을 그리고 T_1에 내접하는 원 C_2를 그린다. 이와 같이 원 C_n에 내접하는 정삼각형 T_n을 그리고, 정삼각형 T_n에내접하는 원 C_{n+1}을 그릴 때, 원 C_n의 넓이가 $\frac{1}{100}\pi$보다 작아지는 자연수 n의 최솟값을 구하여라.13)



014.

그림과 같이 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S라 하자. 두 사각형 ABQP, CDSR의 넓이를 각각 α, β라 하고 네 점 P, Q, R, S의 y좌표를 각각 p, q, r, s라 하자. p, q, r, s가 이 순서대로 등차수열을 이루고, $\beta=3\alpha$일 때, $s-p$의 값은?14)



① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$

④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

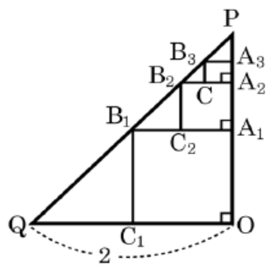
015.

첫째항이 3이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 그 수열의 n항까지의 합 S_n에 대하여 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하여라.15) (단, $a_2 \neq a_3$)

(가) $6 \leq a_2 + a_3 < 18$
(나) $S_m = 129$

016.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OQ}} = 2$인 직각이등변삼각형 OPQ에 정사각형 $\mathrm{OA_1B_1C_1}$을 내접시킨다. 다시 직각이등변삼각형 $\mathrm{A_1PB_1}$에 정사각형 $\mathrm{A_1A_2B_2C_2}$를 내접시킨다. 이와 같은 시행을
5회 반복할 때만들어지는 정사각형의 넓이의 총합은?16)



① $\dfrac{3}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$　② $\dfrac{4}{3}\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right\}$　③ $\left\{1+\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\right\}$
④ $\dfrac{4}{3}$　⑤ $\dfrac{4}{3}\left\{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$

017.

다섯 개의 실수 a, x, y, z, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고,
다섯 개의 실수 a, p, q, r, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
다음 보기 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?17) (단, $ab \neq 0$)

ㄱ. $ab = q^2$
ㄴ. $a + x + z + b = 4y$
ㄷ. $(3x - 4y + 3z)^2 \leq 2q^2 + 2pr$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

018.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{50} n\left(\sin\frac{n}{2}\pi + \cos\frac{n}{2}\pi\right)^n$ 의 값을 구하여라.18)

019.

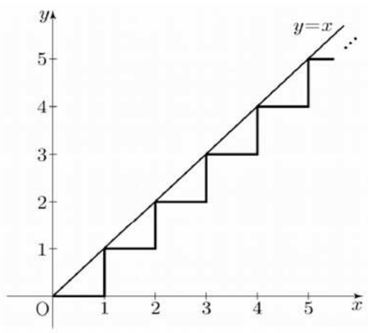
공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_8 = 2a_3$일 때, $\sum_{n=1}^{21} \frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_n a_{n+1}}$의 값은?[19]

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{24}$
④ $\frac{7}{24}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

020.

좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다.
이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을
다음과 같은 규칙으로 정한다.

(가) A_0은 원점이다.
(나) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서
점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$만큼 이동한
위치에 있는 점이다.



예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$, $\left(1, \frac{11}{25}\right)$이다.
자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로
나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하여라.[20]

021.

자연수 n에 대하여 다음 시행을 한다.

> n이 홀수이면 n에서 1을 빼고,
> n이 짝수이면 n을 2로 나눈다.

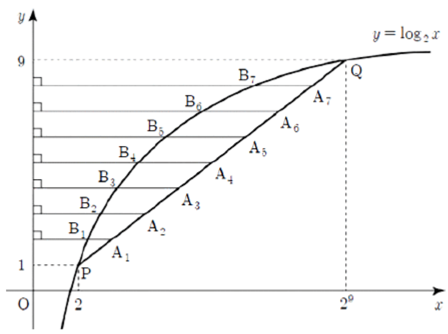
자연수 n이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 a_n이라 정의하자.

예를 들어 $a_7=4$, $a_8=3$이다. $S_n=\sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k$라 할 때, S_{50}의 값은?21) (단, $a_1=0$이다.)

① 200 ② 201 ③ 202
④ 203 ⑤ 204

022.

그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(2,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2^9,\ 9)$에 대하여 선분 PQ를 8등분하여 점 P에 가까운 점부터 차례로 A_1, A_2, A_3, $\cdots$, A_7이라 하고, 점 A_n에서 y축에 내린 수선과 곡선 $y=\log_2 x$의 교점을 B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{7} l_n$의 값은?22)



① 1291 ② 1391 ③ 1491
④ 1591 ⑤ 1691

023.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_1 = b_1 + 1, \quad a_{20} + b_{20} = 45,$$
$$a_{n+1} + a_n = b_{n+1} - b_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하여라.[23)]

024.

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 2, \quad a_n + a_{n+1} = 3n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의된다. 이때, 두 수

$$P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},$$
$$Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$$

에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.[24)]

025.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2} \quad \cdots \text{㉠}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(가) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=\frac{3^1-1}{2}=1$,

따라서 ㉠이 성립한다.

(나) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{2}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\text{(i)}}$을 더하면

$$1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}+\boxed{\text{(i)}}=\frac{3^k-1}{2}+\boxed{\text{(i)}}=\boxed{\text{(ii)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(가), (나)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 과정에서(i), (ii)에 알맞은 것을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(2)+g(4)$의 값을 구하여라.[25]

[수1 단원평가]

수열 C1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	⑤	03	26	04	⑤	05	③
06	630	07	24	08	①	09	18	10	⑤
11	④	12	①	13	6	14	③	15	192
16	②	17	③	18	675	19	④	20	8
21	⑤	22	①	23	23	24	10	25	130

3번 해설

$A_1 = \{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$, $A_2 = \{9,\ 11,\ 13,\ \cdots,\ 21\}$, $A_3 = \{15,\ 17,\ 19,\ \cdots,\ 31\}$, $\cdots$,

$A_k = \{6k-3,\ 6k-1,\ 6k+1,\ \cdots,\ 10k+1\}$, $A_{15} = \{87,\ 89,\ 91,\ \cdots,\ 151\}$이다.

집합 A_p의 가장 작은 원소 $(6p-3)$이 집합 A_{15}의 가장 큰 원소보다 커야 하므로

$6p-3 > 151$이어야 한다.

9번 해설

$a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$, $S_k > S_{k+1}$을 만족하므로 자연수 k는

$a_{k+1} < 0$을 만족시키는 가장 작은 자연수이다.

(나)의 $a_9 = -a_6$, $a_6 > 0$, $a_9 < 0$ 이고, $a_6 a_7 a_8 < 0$, $a_7 > 0$, $a_8 < 0$이다.

따라서 $k = 7$이다.

15번 해설

조건 (가)에서 $6 \le 3r + 3r^2 < 18$,

$2 \le r + r^2 < 6$, $r = -2$ 또는 $r = 1$,

$r = 1$인 경우 $a_2 \ne a_3$라는 조건을 만족시키지 않는다.

조건 (나)에서 $S_m = \dfrac{3\{1-(-2)^m\}}{1-(-2)} = 1-(-2)^m$, $m = 7$

17번 해설

ㄷ. $3x - 4y + 3z = 2y = a + b$, $2q^2 + 2pr = 4q^2 = 4ab$이므로

$(3x-4y+3z)^2 - (2q^2 + 2pr) = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \ge 0$

20번 해설

점 P가 경로를 따라 이동한 거리는 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{25} = \frac{n^2}{25} = \left(\frac{n}{5}\right)^2$이다.

A_n이 직선 $y = x$위에 있기 위해서는 이동한 거리가 짝수이어야 한다.

$\left(\dfrac{n}{5}\right)^2$이 짝수이면 $\dfrac{n}{5}$도 짝수 $\dfrac{n}{5} = 2m$(단, m은 자연수)에서 $n = 10m$이다.

$y = x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m = 2$, 즉 $n = 20$일 때이므로 점 A_{20}이다.

이동한 거리가 $\left(\dfrac{20}{5}\right)^2 = 4^2 = 16$, x좌표는 8이다.

21번 해설

<table>
<tr><td>k</td><td>2^n</td><td>2^n+1</td><td>2^n+2</td><td>2^n+3</td></tr>
<tr><td rowspan="4">시행</td><td>2^{n-1}</td><td>2^n</td><td>$2^{n-1}+1$</td><td>2^n+2</td></tr>
<tr><td>2^{n-2}</td><td rowspan="2">$\vdots$</td><td>2^{n-1}</td><td rowspan="2">$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a_k</td><td>n</td><td>$n+1$</td><td>$n+1$</td><td>$n+2$</td></tr>
</table>

따라서 $S_n = \displaystyle\sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k = 4n+4$이다. $\therefore S_{50} = 204$

23번 해설

$a_2 + a_1 = b_2 - b_1$, $a_3 + a_2 = b_3 - b_2$, $\cdots$, $a_{20} + a_{19} = b_{20} - b_{19}$

위의 식을 변끼리 더하면 $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) - a_1 - a_{20} = b_{20} - b_1$

24번 해설

$n=1$일 때, $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 1$

$n=2$일 때, $a_2 + a_3 = 6 \Rightarrow a_3 = 5$

$n=3$일 때, $a_3 + a_4 = 9 \Rightarrow a_4 = 4$

$\Rightarrow a_{2n-1} - a_{2n} = 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$$\Rightarrow P - Q = \sum_{k=1}^{10} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$$