기하 단원평가

공간도형과 공간좌표 [B1]

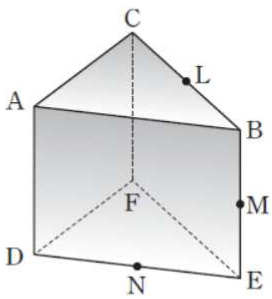
001.

좌표공간의 두 점 $A(1,\ 2,\ t)$, $B(-1,\ t,\ 4)$에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은?1)
(단, t는 실수이다.)

① 2　　② $\sqrt{6}$　　③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$　　⑤ $2\sqrt{3}$

002.

삼각기둥 ABC−DEF의 세 모서리 BC, BE, DE의 중점을
각각 L, M, N이라 할 때, 보기에서 옳은 것만 있는 대로 고른 것은?2)



ㄱ. 직선 LN의 꼬인 위치에 있는 모서리는 모두 7개이다.
ㄴ. 직선 BE와 평면 ANL은 평행하다
ㄷ. 점 M에서 평면 ADFC에 내린 수선과 직선 LN은 서로 수직이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

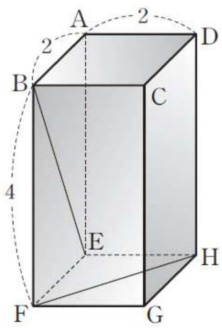
003.

좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$과 한 좌표축이 두 점에서 만날 때, 이 두 점 사이의 거리는?[3)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

004.

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=2$, $\overline{BF}=4$인 직육면체 $ABCD-EFGH$에서 직선 BE와 직선 FH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은?[4)]



① $\frac{\sqrt{22}}{5}$ ② $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{23}}{5}$
④ $\frac{\sqrt{94}}{10}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

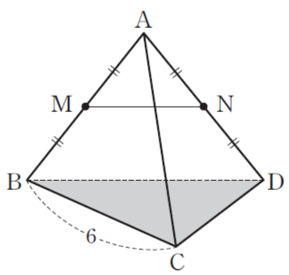
005.

좌표공간의 점 $P(2,\ 2,\ 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자.
두 점 P와 Q 사이의 거리는?[5)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

006.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 AB, AD의 중점을 각각 M, N이라 할 때, 삼각형 AMN의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는?[6)]



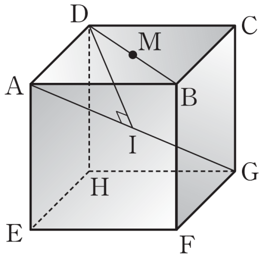
① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

007.

좌표공간에서 세 점 $A(5,\ 2,\ 7)$, $B(6,\ 2,\ 3)$, $C(3,\ -1,\ 0)$과 선분 BC의 연장선 위의 점 D가 $2\overline{BC}=3\overline{BD}$를 만족시킬 때, $\overline{AD}^2$의 값을 구하여라.7)
(단, 점 D는 선분 BC 위의 점이 아니다.)

008.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 $ABCD-EFGH$가 있다. 선분 BD의 중점을 M, 점 D에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 I라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?8)



ㄱ. $BD \perp CG$
ㄴ. $AG \perp BD$
ㄷ. $MI \perp AG$

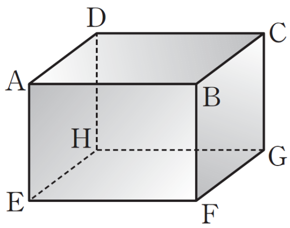
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

009.

그림과 같이 좌표공간에서 세 모서리 AD, AB, AE가 각각 x축, y축, z축에 평행한 직육면체 ABCD−EFGH는 다음 조건을 만족시킨다.

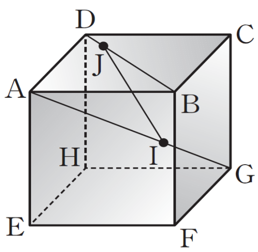
(가) 점 E를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점은 점 G이다.
(나) 꼭짓점 B의 좌표는 $(2,\ 3,\ 5)$이다.

꼭짓점 H의 좌표가 $(a,\ b,\ c)$일 때, $(a+b+c)^2$의 값을 구하여라.9)



010.

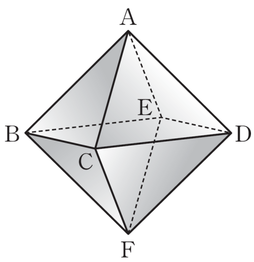
그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체 ABCD−EFGH에서 선분 AG를 $2:1$로 내분하는 점을 I, 선분 BD를 $5:1$로 내분하는 점을 J라 할 때, 선분 IJ의 길이는?10)



① $2\sqrt{6}$ ② $\sqrt{26}$ ③ $2\sqrt{7}$
④ $\sqrt{30}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

011.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정팔면체 ABCDEF에서 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영의 넓이를 S라 하고, 삼각형 ABC의 평면 BCF 위로의 정사영의 넓이를 T라 할 때, S^2+T^2의 값은?11)

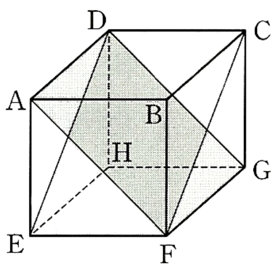


① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

012.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 ABCD－EFGH에서 두 평면 AFGD, DEFC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?12)

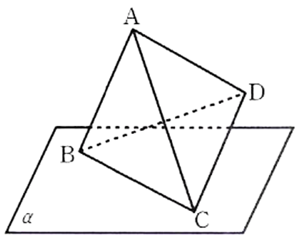


① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

013.

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사면체 ABCD의 모서리 BC는 평면 α 위에 있고, 삼각형 ABC는 평면 α에 수직이다. 이 때, 삼각형 BCD와 평면 α가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은?13)

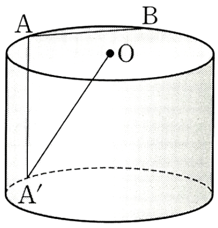


① $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　② $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　③ $\dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

014.

그림과 같이 밑면이 반지름의 길이가 3인 원이고, 높이가 4인 원기둥이 있다. 위쪽 밑면인 원의 둘레 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이고, 점 A에서 아래쪽 밑면에 내린 수선의 발을 A′이라 하자. 위쪽 밑면의 중심을 O라 하고 직선 OA′과 직선 AB가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?14)

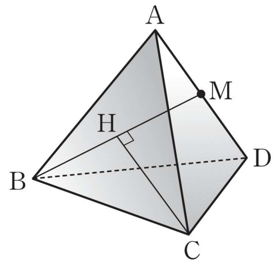


① $\dfrac{2}{10}$　② $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　③ $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

015.

그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정사면체 ABCD에서 선분 AD의 중점을 M, 점 C에서 선분 MB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 CH의 길이는?15)

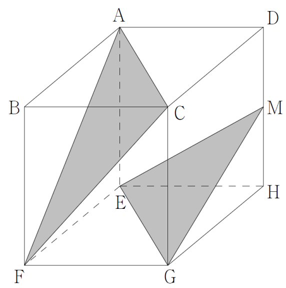


① $\frac{\sqrt{22}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{23}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{26}}{3}$

016.

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에 대하여 모서리 DH의 중점을 M이라 하자. 삼각형 EGM의 세 점 A, F, C를 포함하는 평면 위로의 정사영의 넓이가 S일 때, $12S^2$의 값을 구하여라.16)



017.

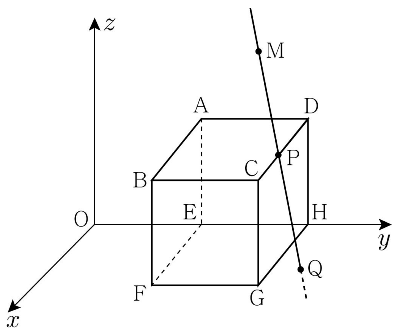
점 A$(1,\ 2,\ 3)$과 구 $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=1$ 위의 점 P를 잇는 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점 Q$(x,\ y,\ z)$의 자취에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?17)

ㄱ. 점 Q의 자취는 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$인 구이다.
ㄴ. 원점 O에서 점 Q까지의 거리의 최솟값은 3이다.
ㄷ. 점 Q의 자취를 xy평면 위로 정사영 했을 때의 넓이는 $\frac{\pi}{9}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

018.

그림과 같이 좌표공간에 있는 정육면체 ABCD−EFGH에서 A$(0,\ 3,\ 3)$, E$(0,\ 3,\ 0)$, F$(3,\ 3,\ 0)$, H$(0,\ 6,\ 0)$이다. 점 M$(1,\ 5,\ 6)$과 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 P에 대하여 직선 MP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하자. 이때, 선분 MQ의 길이의 최댓값은?18)



① $2\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{14}$
④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $2\sqrt{17}$

019.

좌표공간의 두 점 A$(2,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$에 대하여 선분 AB 위의 한 점을 C라 하자. 점 D$(0,\ 0,\ 4)$에 대하여 두 점 C, D 사이의 거리의 최솟값은?[19]

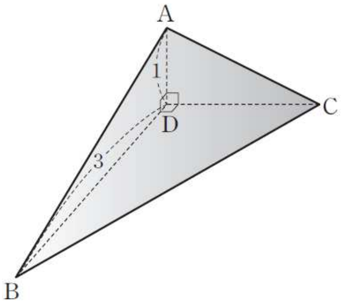
① $\sqrt{2}$　② $2\sqrt{2}$　③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

020.

그림과 같이 세 모서리 AD, BD, CD가 서로 수직인 사면체 ABCD에 대하여 다음이 성립한다.

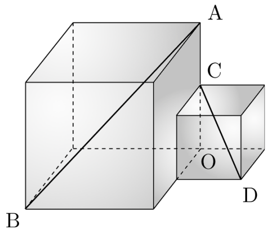
> (가) $\overline{AD}=1$, $\overline{BD}=3$
> (나) 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{6}{7}$이다.

삼각형 BCD의 넓이를 구하여라.[20]



021.

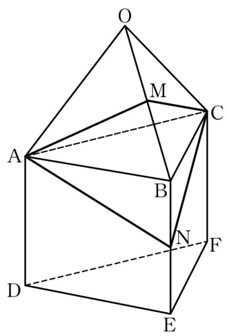
한 모서리의 길이가 각각 2와 1인 두 정육면체를 그림과 같이 꼭짓점 O와 두 모서리가 겹쳐지도록 붙여 놓았다. 두 정육면체의 대각선 AB와 CD가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\frac{\theta}{2}$의 값은?[21)]



① $\frac{\sqrt{6}}{3}$　② $\frac{\sqrt{70}}{10}$　③ $\frac{2\sqrt{22}}{11}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{130}}{13}$

022.

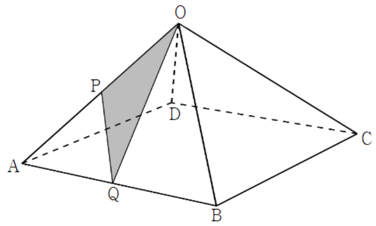
그림은 모든 모서리의 길이가 2인 정삼각기둥 ABC−DEF의 밑면 ABC와 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 OABC의 밑면 ABC를 일치시켜 만든 도형을 나타낸 것이다. 두 모서리 OB, BE의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 평면 MCA, NCA가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[22)]



① $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$　② $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$　③ $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$
④ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$　⑤ $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

023.

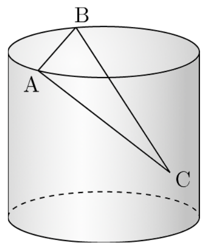
한 변의 길이가 4인 정사각형을 밑면으로 하고 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=2\sqrt{5}$ 인 정사각뿔 $O-ABCD$ 가 있다. 두 선분 OA, AB 의 중점을 각각 P, Q 라 할 때, 삼각형 OPQ 의 평면 OCD 위로의 정사영의 넓이는?[23]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

024.

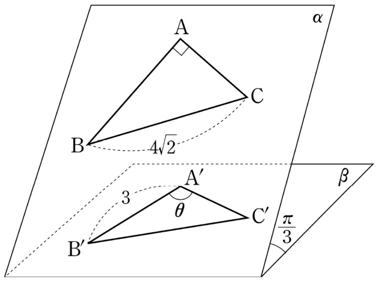
그림과 같이 높이가 4인 원기둥의 위쪽 밑면의 둘레 위의 두 점 A, B 와 원기둥의 옆면의 한 점 C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 원기둥의 아래쪽 밑면으로의 정사영이 넓이가 $\sqrt{3}$ 인 정삼각형일 때, 삼각형 ABC 의 넓이의 최댓값은?[24]



① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

025.

그림과 같이 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 평면 α 위에 $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 세 점 A, B, C의 평면 β 위로의 정사영을 각각 A′, B′, C′이라 하고, $\angle B'A'C' = \theta$라 하자. $\overline{A'B'} = 3$일 때, $\sin\theta = \frac{q}{p}\sqrt{11}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[25) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[기하 단원평가]

공간도형과 공간좌표 B1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	③	03	④	04	②	05	④
06	③	07	17	08	⑤	09	25	10	②
11	②	12	③	13	⑤	14	③	15	③
16	64	17	⑤	18	⑤	19	③	20	3
21	①	22	③	23	③	24	④	25	41

6번 해설

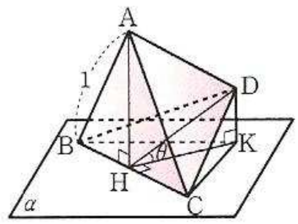
삼각형 AMN은 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로 삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$이다.

또 정사면체의 두 면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $\frac{9\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

13번 해설

두 점 A, D에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H, K라고 하면
$\angle \mathrm{DHK}=\theta$이므로 $\angle \mathrm{AHD}=90^\circ-\theta$이다.
이 때, 삼각형 AHD에서 코사인법칙에 의하여



$$\cos(90^\circ-\theta)=\frac{\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{HD}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2}{2\cdot\overline{\mathrm{AH}}\cdot\overline{\mathrm{HD}}}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$$

이므로 $\sin\theta=\frac{1}{3}$, $\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

16번 해설

면 ACF과 면 DEG는 평행하므로 주어진 문제는 면 ACF를 면 ACF로 바꾸어 생각하면 된다.
꼭짓점 D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼각형 DIM에서 코사인법칙에 의하여
$\cos\angle\mathrm{DIM}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다. 따라서 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$이고 $12S^2=64$이다.

17번 해설

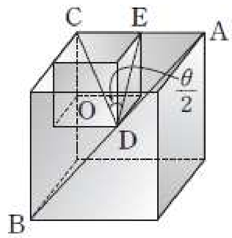
점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$로 놓으면 점 P는 구 위의 점이므로 $(a+1)^2+b^2+(c-2)^2=1$이다.

또, 점 Q는 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $\mathrm{Q}\left(\frac{a+2}{3},\ \frac{b+4}{3},\ \frac{c+6}{3}\right)$이고

이 때, $x=\frac{a+2}{3}$, $y=\frac{b+4}{3}$, $z=\frac{c+6}{3}$에서 $a=3x-2$, $b=3y-4$, $c=3z-6$이다.

대입하여 정리하면 Q의 자취의 방정식은 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$이다.

21번 해설



그림과 같이 작은 정육면체를 큰 정육면체 안으로 평행이동하면
점 D는 선분 AB의 중점이 되고 점 E는 선분 AC의 중점이다.
따라서 두 직선 AB와 CD가 이루는 예각의 크기는 $\angle CDA$이고

$\overline{AD}=\overline{CD}=\sqrt{3}$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$이므로 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\overline{CD}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

24번 해설

원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 2이므로 $\overline{AB}=2$이다.
삼각형 ABC의 넓이가 최대가 될 때는 점 C가 아래쪽 밑면의 둘레의 있을 때이다.

이때 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$이므로

점 C에서 변 AB까지의 거리는 $\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{19}=\sqrt{19}$이다.

25번 해설

직각이등변삼각형 ABC에서 $\angle A=\frac{\pi}{2}$, $\overline{BC}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}=\overline{AC}=4$이다.

평면 α와 평면 β의 교선을 l이라 하고, 선분 AB와 직선 l이 이루는 각의 크기를 ϕ라 하자.

길이가 4인 선분 AB의 평면 β로의 정사영의 길이가 3인 것을 잘 재려보면 $\sin\phi=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$이다.

$\Rightarrow$ 선분 AC와 직선 l이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{2}-\phi$이므로 $\overline{A'C'}=\sqrt{11}$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 8이이므로 정사영인 삼각형 A′B′C′의 넓이는 4이다.

이 값이 $\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{11}\times\sin\theta$이므로 $\sin\theta=\frac{8\sqrt{11}}{33}$이다.