기하 단원평가

평면벡터 [B3]

001.

$\vec{a}=(-2,\ 5)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$일 때, $\vec{a}+\vec{x}=4\vec{b}$를 만족하는 벡터 $\vec{x}$의 크기는?[1)]

① $3\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ 6

④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $3\sqrt{6}$

002.

세 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(4,\ 4)$, $\vec{c}=(-1,\ 5)$에 대하여 $t\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{c}-\vec{b}$가 서로 평행할 때 실수 t의 값을 구하여라.[2)]

003.

두 벡터 $\vec{a}=(2,\ k)$ $\vec{b}=(k,\ -3)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$를 만족하는 실수 k의 값을 p라 할 때 p^2의 값을 구하여라.3)

004.

두 벡터 $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}+\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때 $\tan\theta$를 구하여라.4)

005.

두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 4-x)$, $\vec{b}=(7,\ x)$가 서로 수직이기 위한 양의 실수 x의 값을 m, 서로 평행하기 위한 x의 값을 n이라 할 때, $\frac{n}{m}$의 값은?5)

① $\frac{2}{5}$　② $\frac{4}{5}$　③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{8}{5}$　⑤ 2

006.

벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$는 크기가 2이고 벡터 $\vec{b}=(3,\ 4)$와 이루는 각의 크기가 60°일 때, $3a_1+4a_2$의 값은?6)

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

007.

점 $\mathrm{A}(3,\ -2)$를 지나고 직선 $x-1=2(y-2)$에 평행한 직선이 $(1,\ a)$를 지날 때, a^2의 값을 구하여라.7)

008.

직선 $l: \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{2}$이 직선 $m: \dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y+3}{-a}$과는 서로 평행하고,

직선 $n: \dfrac{x-2}{-b}=\dfrac{y}{3}$와는 서로 수직이다. $b-a$의 값을 구하여라.8) (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

009.

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[9)]
(단 p와 q는 서로소인 자연수이다.)

010.

삼각형 ABC에서 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}$를 만족시키는 점 P가 삼각형 ABC의 내부에 있도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?[10)]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

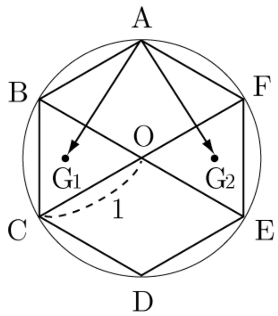
011.

좌표평면에 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(5,\ 3)$이 있다. $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하면 $m+n=6$인 음이 아닌 두 실수 m, n에 대하여 $\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 전체의 길이는?[11] (단, O는 원점이다.)

① $5\sqrt{13}$　② 20　③ $6\sqrt{13}$
④ 24　⑤ $7\sqrt{13}$

012.

아래 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에 내접하는 정육각형이 있다.
두 삼각형 OBC와 OEF의 무게중심을 각각 G_1, G_2라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AG}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}_2}$의 값은?[12]



① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{2}{3}$

013.

세 점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 4)$, $C(1,\ -1)$이 있다. $|\overrightarrow{CP}|=r$를 만족시키는 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$인 점 P가 존재하기 위한 양수 r의 최솟값을 m이라 할 때, m의 값은?13)

① $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{13\sqrt{5}}{10}$ ③ $\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$
④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

014.

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 O, A, B가 있다.

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (s,\ t\text{는 실수})$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형에 대한 설명으로 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?14)

ㄱ. $s+t=1$이면 점 P는 두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점이다.
ㄴ. $s+t\le 1$, $s\ge 0$, $t\ge 0$이면 점 P는 삼각형 OAB의 경계와 내부의 모든 점이다.
ㄷ. $0\le s\le 1$, $0\le t\le 1$이면 점 P는 선분 OA와 선분 OB를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형의 경계와 내부의 모든 점이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

015.

좌표평면 위의 점 A가 부등식 $y \geq \frac{1}{4}x^2+3$이 나타내는 영역에서 움직일 때,

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$의 종점 B가 나타내는 도형의 길이는?[15] (단, O는 원점이다.)

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$

④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ 3

016.

영벡터가 아닌 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}_{n+1}}$과 $\overrightarrow{\mathrm{BA}_n}$이

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}_{n+1}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}_n}\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

과 $|\overrightarrow{\mathrm{BA}_1}|+|\overrightarrow{\mathrm{BA}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{BA}_3}|+|\overrightarrow{\mathrm{BA}_4}|=15$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\overrightarrow{\mathrm{BA}_k}|$의 값은?[16]

① 14 ② 16 ③ 18

④ 20 ⑤ 22

017.

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 세 점 P, Q, R가 $\overline{PQ}=\overline{PR}$를 만족하며 움직일 때, $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}$의 최솟값은?17)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

018.

좌표평면 위의 세 점 A$(2, 0)$, B$(-2, 0)$, C$(0, 2)$에 대하여 P(x, y)가 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}\le 21$, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}\ge 0$을 만족할 때, 점 P가 나타내는 영역의 넓이는?18)

① 20π　② 21π　③ 22π
④ 23π　⑤ 24π

019.

점 P 의 위치벡터를 $\vec{p}$, 점 Q 의 위치벡터를 $\vec{q}$라 하자. 좌표평면 위의 세 벡터 $\vec{a}=(1,\ 4)$, $\vec{b}=(4,\ 2)$, $\vec{c}=(2,\ -1)$에 대하여 $\vec{p}$, $\vec{q}$는 각각 $\vec{c}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$, $|\vec{q}-\vec{b}|=1$을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최솟값은?[19)]

① $\sqrt{5}-1$　② $\sqrt{5}-2$　③ $\frac{7\sqrt{5}}{5}-1$

④ $\frac{8\sqrt{5}}{5}-1$　⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}-2$

020.

좌표평면에서 점 A$(12,\ 16)$과 점 P 의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 할 때, $\vec{p}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$을 만족시킨다. 점 C$(-6,\ 8)$에 대하여 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?[20)] (단, O는 원점이다.)

① 50　② 52　③ 54

④ 56　⑤ 58

021.

좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하는 반지름의 길이가 1, 2인 원을 각각 O_1, O_2라 할 때, 원 O_1 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$와 원 O_2 위의 점 $\mathrm{C}(1,\ c)$에 대하여 원 O_1 위의 점 D가 $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 만족시킨다. $a+b+c$의 값은?[21] (단, $a>0$, $c>0$)

① 1　② $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　③ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}$　⑤ $2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

022.

직선 $l_1 : x = \dfrac{y-1}{\sqrt{2}}$ 위의 두 점 A, B와 직선 $l_2 : \sqrt{2}(1-x) = y+4$ 위의 두 점 C, D에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{CD}} = 3$일 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2$의 모든 값의 합은?[22]

① 40　② 45　③ 50

④ 55　⑤ 60

023.

좌표평면에서 중심이 $A(3,\ 4)$이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1이 있다. 동점 P가 원 O_1의 원주 위를 한 바퀴 회전할 때, 동점 Q는 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$, $|\overrightarrow{PQ}|=4$인 관계를 만족한다. 이 때, $|\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은?[23] (단, O는 원점)

① $2\sqrt{5}$ ② 7 ③ $5+2\sqrt{5}$
④ 10 ⑤ 11

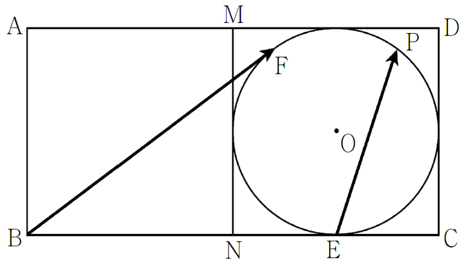
024.

포물선 $y^2=2x$ 위의 두 동점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$의 내적 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최솟값은?[24] (단, O는 원점이다.)

① $-\dfrac{1}{4}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ -1
④ -2 ⑤ -4

025.

그림과 같이 직사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=4$이고, 두 선분 AD, BC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 정사각형 MNCD에 내접하는 원을 O라 할 때, 점 B에서 원 O에 그은 두 접선의 접점을 각각 E, F라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EP}$의 내적 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{EP}$의 최댓값을 k라 할 때, $10k$의 값을 구하여라.[25)]



[기하 단원평가]

평면벡터 B3 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	8	03	25	04	1	05	①
06	③	07	9	08	6	09	7	10	③
11	③	12	⑤	13	⑤	14	⑤	15	①
16	②	17	①	18	④	19	④	20	④
21	②	22	③	23	③	24	③	25	48

9번 해설

$\angle \mathrm{HPB} = \theta (30^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$라 하면

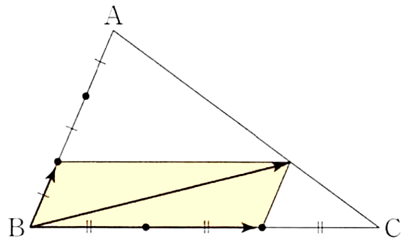
$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos(180^\circ - \theta) = -|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos\theta = -|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PH}}|$이다.

10번 해설

$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{1-k}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이다.

그림에서 색칠된 부분 (삼각형 ABC의 변 제외)에 점 P가 있어야 하므로



$0 < \frac{1-k}{6} < \frac{2}{3}$, $-3 < k < 1$

따라서 정수 k는 -2, -1, 0이다.

21번 해설

$c = \sqrt{3}$이다. $\mathrm{D}(p,\ q)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (p-a,\ q-b)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$에서 $p = a$, $q - b = \sqrt{3}$이다.

$b = -\sqrt{1-a^2}$을 대입하여 계산하면 $a = \frac{1}{2}$이다.

23번 해설

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = 0$이면 $\overline{\mathrm{AP}} \perp \overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 4$에서 $\overline{\mathrm{AQ}} = 2\sqrt{5}$이다.

즉, 점 P가 $\mathrm{A}(3,\ 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원주 위를 움직이면,

점 Q는 $\mathrm{A}(3,\ 4)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위를 움직인다.

24번 해설

두 점 P, Q의 좌표를 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha^2}{2},\ \alpha\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{\beta^2}{2},\ \beta\right)$로 놓으면,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\beta^2}{2}+\alpha\cdot\beta=\frac{1}{4}(\alpha\beta+2)^2-1$$

이므로, 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최솟값은 -1이다.

25번 해설

$\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BE}})=\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

한편, $\angle\mathrm{OBE}=\alpha$라 두면 $\angle\mathrm{FBE}=2\alpha$

삼각형 OBE에서 $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$이고 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\dfrac{4}{5}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BE}}=|\overrightarrow{\mathrm{BF}}||\overrightarrow{\mathrm{BE}}|\cos2\alpha=\frac{3\times3\times4}{5}=\frac{36}{5}$$

원 위의 점 P에서 직선 BF에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\cos(\angle\mathrm{FBP})=\overline{\mathrm{BF}}\times\overline{\mathrm{BH}}$$

$2\le\overline{\mathrm{BH}}\le4$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$의 최댓값은 12이다.