미적분 단원평가

미분법 [C1]

001.

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}=55$일 때, 자연수 n의 값은?[1)]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

002.

곡선 $y=e^x$ 위에 정점 A$(0,\ 1)$과 동점 P가 있다. 선분 AP의 중점 M을 지나고 선분 AP에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 곡선을 따라 점 A에 한없이 가까워질 때, 점 Q는 어떤 점에 한없이 가까워지는가?[2)]

① $\left(\frac{1}{e},\ 0\right)$ ② $\left(\frac{2}{e},\ 0\right)$ ③ $(1,\ 0)$
④ $(2,\ 0)$ ⑤ $(e,\ 0)$

003.

1이 아닌 양수 x에 대하여 $f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^{3h}-1}{h}$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(1+4x)}{2x}$의 값을 구하여라.3)

004.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 함수 $f_n(x)=e^x(a_n x+b_n)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 모든 실수 x에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족한다. 이때 $\log_2 a_{10}$의 값을 구하여라.4)

(가) $f_1(x)=xe^x$
(나) $f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_n{}'(x)$

005.

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(0)=2$를 만족하고, 임의의 실수 x, y에 대하여

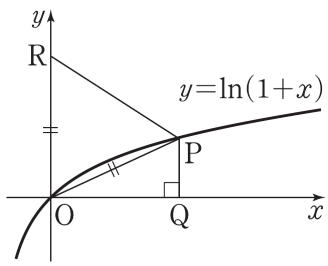
$$f(x+y)=\frac{f(x)}{e^y}+\frac{f(y)}{e^x}$$

가 성립한다고 할 때, $f'(x)+f(x)=\frac{k}{e^x}$를 만족하는 상수 k의 값은?5)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

006.

그림과 같이 곡선 $y=\ln(1+x)$의 제1사분면 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OR}}$를 만족하는 y축 위의 점을 R라 하자. 점 P가 원점 O로 한없이 가까이 갈 때, $\frac{\triangle\mathrm{OPR}}{\triangle\mathrm{OQP}}$의 극한값은?6)



① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

007.

$\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$의 값은 a이다. $4a^2$의 값을 구하여라.7)

$\left(단, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$

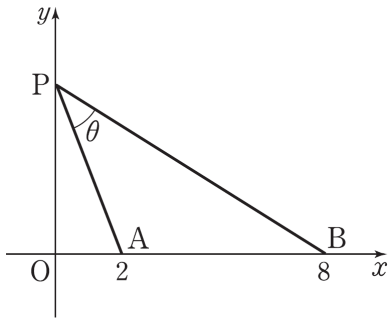
008.

함수 $f(x)=\cos x(0\leq x\leq\pi)$의 역함수 $y=g(x)$에 대하여 $g\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{12}{13}\right)=\beta$일 때,

$\sin(\alpha-\beta)$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.8) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

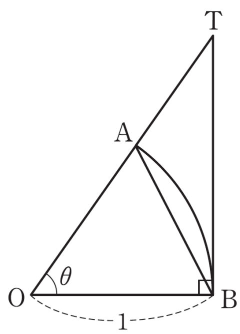
009.

다음 그림과 같이 x축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 0)$과 y축 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ a)$에 대하여 $\angle \mathrm{APB}=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값이 최대가 되는 점 P의 y좌표를 구하여라.[9] (단, $a>0$)



010.

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에서 현 AB를 긋고, 점 B를 지나 선분 OB에 수직인 직선이 선분 OA의 연장선과 만나는 점을 T라 하자. 이때 θ, $\sin\theta$, $\tan\theta$의 대소 관계로 옳은 것은?[10] $\left(단,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



① $\sin\theta<\theta<\tan\theta$　② $\theta<\sin\theta<\tan\theta$　③ $\sin\theta<\tan\theta<\theta$
④ $\tan\theta<\sin\theta<\theta$　⑤ $\theta<\tan\theta<\sin\theta$

011.

함수 $f(x)=\sin x+\cos x$에 대하여

$$f_1(x)=f(x),\quad f_2(x)=f_1{}'(x),\quad f_3(x)=f_2{}'(x),\quad f_4(x)=f_3{}'(x),\ \cdots$$

으로 정의할 때, $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots+f_{2020}(x)$를 간단히 한 것은?[11]

① $-2\cos x$　② $-2\sin x$　③ 0
④ $2\sin x$　⑤ $2\cos x$

012.

함수 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$에 대하여

$$f_1(x)=f(x),\quad f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$$

로 정의한다. $a_n=\lim_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{\sin x}$일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[12]

ㄱ. $a_1=\frac{1}{2}$

ㄴ. $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

013.

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^2+x)-f(2x)=(x^2-2x)^3+x$$

를 만족할 때, $f'(2)$의 값은?13)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

014.

$e^{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ 를 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값을 구하여라.14)

015.

함수 $f(x)=\ln(\ln x)(x>1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\dfrac{g'(0)}{g(0)}$의 값을 구하여라.15)

① 1　　② 2　　③ $\sqrt{e}$
④ e　　⑤ e^2

016.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=kx+\ln(x^2+4)$의 역함수가 존재하기 위한 상수 k의 값의 범위는 $|k|\geq a$이다. $60a$의 값을 구하여라.16)

017.

방정식 $3x-k=\ln x$가 실근을 갖도록 하는 실수 k의 최솟값은?17)

① $1-\ln 3$ ② 1 ③ $1+\ln 3$
④ $2+\ln 3$ ⑤ 3

018.

$0 \le x \le \frac{\pi}{3}$를 만족하는 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\cos x - k \le k\sin x$가 성립하도록 실수 k의 값을 정할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.18)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

019.

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{g(x)-3}=4$가 성립한다.

이때 $f'(3)$의 값을 구하여라.[19]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

020.

함수 $g(x)=\frac{2x+1}{x^2-x+2}$과 이차 이상의 다항함수 $f(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) $h(0)=3$
(나) $h'(0)=5$

이때 다항식 $f(x)$를 $(2x-1)^2$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(4)$를 구하여라.[20]

021.

$f(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{e^x-e^a}$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$의 값을 구하여라.21)

① $\frac{3}{e}$ ② $\frac{5}{e}$ ③ $\frac{7}{e}$
④ $\frac{9}{e}$ ⑤ $\frac{11}{e}$

022.

모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, $x_2(x_1<x_2)$에 대하여 $\frac{f'(x_1)}{f'(x_2)}<1$을 만족할 때, 보기에서 $y=f(x)$가 될 수 있는 것만을 있는 대로 고른 것은?22) (단, $f'(x_2)\neq 0$)

ㄱ. $y=-e^x$
ㄴ. $y=\ln x$
ㄷ. $y=x+\sin x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

023.

2 이상의 양의 정수 n에 대하여 함수 $f(x)=\sin^n x$의 그래프에서 변곡점의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은?[23] $\left(단,\ 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

① $-\frac{1}{\sqrt{e}}$　② $-\frac{1}{e}$　③ 0

④ $\frac{1}{e}$　⑤ $\frac{1}{\sqrt{e}}$

024.

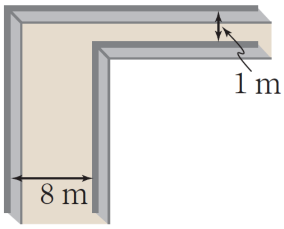
$x>1$일 때, 함수 $f(x)=\frac{x^t}{x-1}(t>1)$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 이때 $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t}$의 값은?[24]

① $\frac{1}{2}e$　② e　③ $\sqrt{2}\,e$

④ $\sqrt{3}\,e$　⑤ $2e$

025.

그림과 같이 폭이 각각 $8\mathrm{m}$, $1\mathrm{m}$인 통로가 직각으로 만나고 있다. 막대를 바닥면에 수평으로 들고 모서리를 돌아갈 수 있는 막대의 최대 길이는 $a\mathrm{m}$이다. a^2의 값을 구하여라.[25] (단, 막대의 두께는 무시한다.)



[미적분 단원평가]

미분법 C1 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	③	02	③	03	6	04	9	05	②
06	③	07	15	08	98	09	4	10	①
11	③	12	⑤	13	①	14	1	15	①
16	30	17	③	18	②	19	④	20	17
21	④	22	①	23	⑤	24	②	25	125

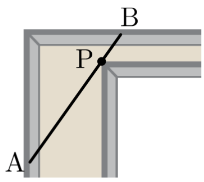
9번 해설

$\angle \mathrm{OPB}=\alpha$, $\angle \mathrm{OPA}=\beta$라 할 때, $\tan\alpha=\dfrac{8}{a}$, $\tan\beta=\dfrac{2}{a}$이고 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{6}{a+\dfrac{16}{a}}$이다. 산술기하.

25번 해설

짱구를 굴려보자. 그림과 같이 점 P를 지나는 선분 AB의 길이의 최솟값이 답이다.



선분 AB와 대충 y축 방향이 이루는 각을 θ라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{8}{\sin\theta}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{\cos\theta}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$를 미분하면 $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$일 때 최소이다.