ToolBOX+

수능수학 최적화 도구상자

다항함수의 미분법

5A ACADEMY

SOOHAN

[TIP01] 미분계수의 정의

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예제 001 [2014학년도 6월(A형) 6번]

함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$의 값은?1)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

예제 002 [한성은 VA9944번]

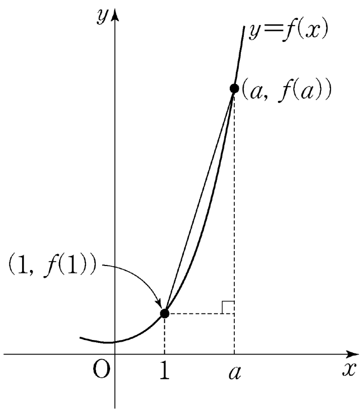
$f'(2)=4$인 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(2)-2f(x)}{f(x)-f(2)}=4$$

일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.2)

예제 003 [2013학년도 6월 16번]

양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?3)



① 1　② $\frac{\sqrt{5}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

[TIP02] 좌미분계수와 우미분계수

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 우미분계수, $\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 좌미분계수라 한다.
교과서에는 없는 용어. 알아는 두자.

※ $f(x)=|x-2|$에 대하여 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$, $\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은?

※ $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\le 1) \\ 2-x & (x>1)\end{cases}$에 대하여 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, $\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값은?

예제 004 [2016학년도 9월(A형) 21번]

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\qquad y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때,
점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?[4)]

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

[TIP03] 곱의 미분법

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

예제 005 [2014학년도 6월(A형) 26번]

다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 2이다.
$g(x) = x^3 f(x)$일 때, $g'(2)$의 값을 구하여라.5)

예제 006 [2015학년도 수능(A형) 29번]

두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) = (x^3 + 2)f(x)$$

를 만족시킨다. $g(x)$가 $x = 1$에서 극솟값 24를 가질 때,
$f(1) - f'(1)$의 값을 구하여라.6)

[TIP04] 합성함수의 미분법

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

※ 미적분 내용. 가끔 튀어 나오니까 해둘 것.

예제 007 [존재해서는 안 되는 문항]

다항함수 $f(x)$가 $f'(4)=2$을 만족시킬 때, 함수 $g(x)=f(x^2)$에 대하여 $g'(2)$의 값을 구하여라.[7)]

[TIP05] 로피탈의 정리

도함수가 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(a)=g(a)=0$을 만족시킬 때,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

※ 정상적으로 푸는 것을 추천하지만, 검토용 정도로 알아두자.

예제 008

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$$

를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값은?[8)]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[TIP06] 조각정의된 함수의 미분가능성

$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x \geq a) \end{cases}$일 때, 함수 $g(x)$, $h(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면,

$f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} g(a)=h(a) \\ g'(a)=h'(a) \end{cases}$

예제 009 [2018학년도 6월(나형) 16번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x \leq -2) \\ 2x & (x>-2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?[9)]
(단, a와 b는 상수이다.)

① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

예제 010 [2017학년도 6월(나형) 29번]

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하여라.[10]

[TIP07] 인수를 곱해 미분가능 만들기

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면서 미분불가능, $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능,
함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $g(a)=0$이다.

※ 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x<1) \\ 4-x & (x\geq 1)\end{cases}$에 대하여

① $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분불가능하다.

② $(x-1)^2 f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

예제 011 [2020학년도 수능(나형) 20번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x\leq 0) \\ x-1 & (0<x\leq 2) \\ 2x-3 & (x>2)\end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[11)]

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.
ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.
ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 012 [2018년 대구11월 29번]

각 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x & (x<3)\\ x^2-6x+10 & (x\geq 3)\end{cases},$$
$$g(x)=f(x-m)+n$$

이다. 함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에 대하여 미분가능할 때, 두 상수 m, n의 곱 mn의 값을 구하여라.12) (단, $m<0$)

[TIP08] 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

이다.

예제 013

곡선 $y=x^3-x$에 접하고 기울기가 2인 두 직선 사이의 거리는?13)

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

예제 014

점 $(1,\ 3)$에서 곡선 $y=x^3-2x$에 그은 접선의 y절편은?14)

① -2 ② -1 ③ 1

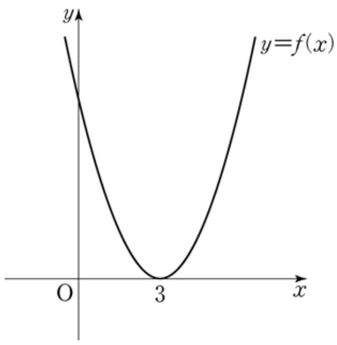
④ 2 ⑤ 3

예제 015 [2016학년도 6월(A형) 13번]

함수 $f(x)$가

$$f(x) = (x-3)^2$$

이다. 함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 y절편이 -5일 때, 이 접선의 x절편은?[15)]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[TIP09] 접선의 인수

대충 제곱인수로 처리하면 개꿀.

※ ‘두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=a$에서 서로 접한다.’는

① $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$

② $f(x)-g(x)=(x-a)^2q(x)$ (두 식 $f(x)$, $g(x)$가 모두 다항식일 때)

교과서에는 없어용.

예제 016 [한성은 QX9725번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=x$이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값을 가질 때, a의 값은?16)

① $\dfrac{13}{6}$ ② $\dfrac{7}{3}$ ③ $\dfrac{5}{2}$

④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ $\dfrac{17}{6}$

예제 017 [2020학년도 수능(나형) 30번]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.[17)]

[TIP10] 직선과의 거리

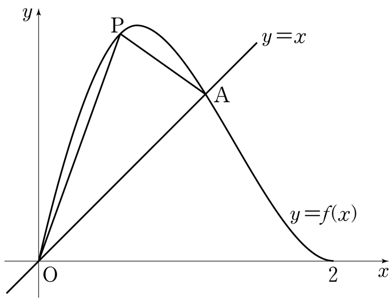
평행한 직선이 접할 때

예제 018 [2013학년도 9월(나형) 19번]

닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

$$f(x) = ax(x-2)^2\left(a > \frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은?18)



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{17}{12}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{19}{12}$

[TIP11] 점과의 거리

법선이 그 점을 지날 때

※ 수능 범위인지를 잘 모르겠음.

예제 019

곡선 $y=x^2-3x+3$ 위의 임의의 점과 원 $x^2+y^2=1$ 사이의 거리의 최솟값은?19)

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

④ 1 ⑤ $2\sqrt{2}-1$

[TIP12] 그래프의 해석과 접선

상황을 읽어보면 접선각.
$\Rightarrow$ 접점의 x좌표를 설정하자.

예제 020 [2018학년도 수능(나형) 29번]

두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x > a) \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 0 & (x \le k) \\ 12(x-k) & (x > k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하여라.[20] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

예제 021 [2019학년도 수능(나형) 30번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
> (나) 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
> (다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하여라.[21] (단, a, b는 유리수이다.)

[TIP13] 도함수와 그래프

알아서.

예제 022 [2016학년도 6월(A형) 27번]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린 구간 $(-a,\ a)$에서 감소할 때,
양수 a의 최댓값을 구하여라.22)

예제 023 [한성은 QO5640번]

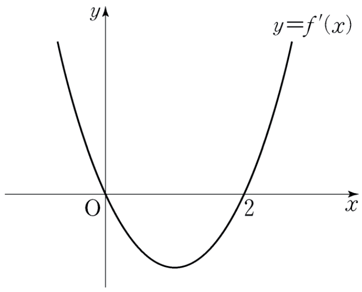
함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x-1)^2(x-7)+n$$

이다. 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖도록 하는 정수 n의 개수를 구하여라.23)

예제 024 [2017학년도 6월(나형) 21번]

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[24)]



ㄱ. $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이다.
ㄴ. $f(0)f(2)\geq 0$이면 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극소인 a의 값의 개수는 2이다.
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $|f(x)|=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP14] 함수의 극대극소

① $x=a$에서 $f'(x)$의 부호가 음수에서 양수로 바뀌면 $f(x)$가 극소이다.
② $x=a$에서 $f'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 바뀌면 $f(x)$가 극대이다.

예제 025 [2020학년도 9월(나형) 17번]

함수 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$의 극댓값이 4이고 $f(-2)>0$일 때, $f(-1)$의 값은?25) (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

예제 026 [2014학년도 6월(A형) 21번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3) & (x<0) \\ x^3-ax & (x\ge 0) \end{cases}$$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은?26) (단 a는 상수이다.)

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[TIP15] 함수의 극대극소2

미분불가능, 불연속점에서도 극대극소를 정의할 수 있다.

※ 극대의 엄밀한 정의 : a를 포함한 어떤 열린 구간에서 $f(x)$가 $x=a$에서 최댓값을 가지면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

예제 027

실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x \le 2) \\ x^2-6x+b & (x > 2) \end{cases}$$

의 극댓값이 4이다. 함수 $f(x)$의 극솟값은?[27] (단 a, b는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$

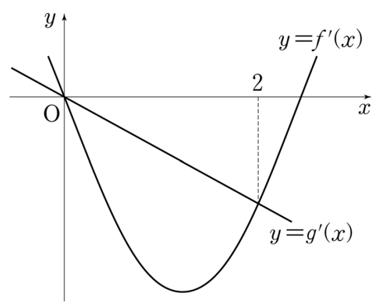
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[TIP16] 차함수와 그래프

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 째려보면
$y=f(x)-g(x)$의 그래프를 얻을 수 있다.
※ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$이다.

예제 028 [2012학년도 6월(나형) 19번]

삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[28)]



ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 029 [2018학년도 6월(나형) 30번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하여라.[29)]

[TIP17] 삼차함수의 개형

삼차함수 $f(x)$의 개형 세 가지. 알고 있지?

예제 030 [2012학년도 9월(나형) 18번]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은?30)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

예제 031 [2012학년도 6월(나형) 15번]

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?31)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[TIP18] 삼차함수의 변곡점

$f''(a)=0$일 때, 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a,\ f(a))$에 대하여 대칭이다.

예제 032 [2017학년도 9월(나형) 20번]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[32)]

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

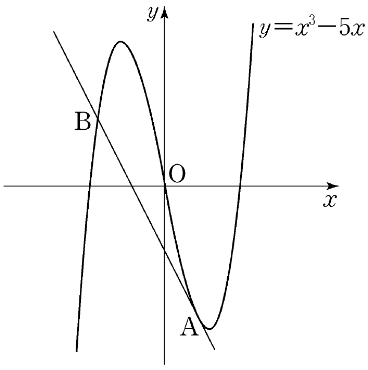
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP19] 삼차함수의 비율1

2 : 1은 잘 쓰인다.

예제 033 [2013학년도 6월(나형) 17번]

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는?33)



① $\sqrt{30}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

[TIP20] 삼차함수의 비율2

$1:\sqrt{3}$ 은 가끔 쓰인다.

예제 034 [2012학년도 수능(나형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?[34)]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[TIP21] 극댓값과 극솟값의 차이

최고차항의 계수가 k인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(\alpha)=0$, $f'(\beta)=0$일 때,

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=\left|\frac{k}{2}(\beta-\alpha)^3\right|$$

예제 035 [2020학년도 6월(나형) 18번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?35)

ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$

ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 036 [2019학년도 6월(나형) 20번]

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1 \ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은?[36)]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[TIP22] 사차함수의 개형

① 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면
$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
② 맨날 나오는 모양 : 그 대칭인 것하고 삼중근 갖는 것.

예제 037 [한성은 QR4956번]

함수 $f(x)=x^4-2(a+1)x^2+4ax$가 극댓값을 갖도록 하는 10 이하의 정수 a의 개수를 구하여라.37)

예제 038 [2011학년도 수능 24번]

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하여라.38)

[TIP23] 사차함수의 비율관계

① 삼중근 갖는 모양일 때 $3:1$은 가끔 쓴다.
② 선대칭일 때 $1:\sqrt{2}$는 거의 안 쓴다.

예제 039 [2010학년도 6월 24번]

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하여라.[39)]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

[TIP24] 다항식의 구성

알아서 잘.

예제 040 [한성은 XC0479번]

사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ f(1))$에서 직선 $y=3$에 접한다.
(나) 점 $(4,\ f(4))$에서 x축에 접한다.

함수 $|f(x)-3|$가 한 점에서만 미분가능하지 않을 때, $f(-2)$의 값을 구하여라.[40)]

예제 041 [2019년 9월(나형) 30번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선과 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 점 $(k,\ 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하여라.[41)](단, k는 상수이다.)

[TIP25] 다항함수의 인수와 그래프

알아서 잘.

예제 042 [2011학년도 6월 12번]

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때,
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[42)]

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

예제 043

두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

을 만족시킨다. $g(x)$의 최고차항의 계수가 3이고, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $f'(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[43] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[TIP26] 제곱인수

알아서 잘.

예제 044 [2016학년도 6월(A형) 21번]

자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?44)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

예제 045 [2014학년도 9월(A형) 21번]

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소하고 구간 $(2,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은?45)

① $\dfrac{21}{4}$　② $\dfrac{43}{8}$　③ $\dfrac{11}{2}$

④ $\dfrac{45}{8}$　⑤ $\dfrac{23}{4}$

[TIP27] 그래프의 이동

[2021학년도 9월 30번]보고 놀란 점 : $f(2a-x)$를 내네.

예제 046 [2021학년도 9월 30번]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$의 값을 구하여라.[46)]

예제 047 [한성은 HK7511번]

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{2}^{x} f(t)dt$$

와 실수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\lvert g(x+a)\rvert$는 오직 $x=4$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 함수 $\lvert g(x)g(2a-x)\rvert$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\lvert f(a)\rvert$의 값을 구하여라.[47)]

[TIP28] 절댓값과 그래프

$y=|f(x)|$야 워낙 많이 보이고,
$y=f(|x|)$ 정도도 알고 있겠지.

예제 048 [2015년 7월(나형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 $g(1)=g'(1)$이다.
(나) $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$g(2)$의 값은?48)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

예제 049 [2010학년도 6월 14번]

$x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?49)

ㄱ. 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[TIP29] 미분가능성과 그래프

알아서 잘.

예제 050 [2018년 경남 10월(나형) 21번]

최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|f(x)+2x+k|$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \le f(x)$이다.

$g'(1)=3$일 때, 실수 k의 값은?[50)]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

예제 051 [2016학년도 수능(A형) 21번]

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은?[51)]

(가) 함수 $|f(x)|$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{2}{15}$
④ $\dfrac{1}{6}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$

[TIP30] 경곗값

알아서 잘.

예제 052

$x > 0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \le f(x) \le 3x$이다.
$f(1) = 2$이고 $f(2) = 6$일 때, $f'(1) + f'(2)$의 값은?[52)]

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

예제 053 [2015학년도 9월(A형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?[53)]

> (가) $f(0)=-3$
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여
> $$6x-6 \leq f(x) \leq 2x^3-2$$
> 이다.

① 36　② 38　③ 40
④ 42　⑤ 44

[TIP31] 방정식과 그래프

방정식 $f(x)=0$의 근을 함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편으로 찾는다.

예제 054 [2019학년도 9월(나형) 15번]

방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?54)

① 2　　② 4　　③ 6
④ 8　　⑤ 10

예제 055 [2016학년도 6월(A형) 17번]

두 함수

$$f(x)=3x^3-x^2-3x, \quad g(x)=x^3-4x^2+9x+a$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는?55)

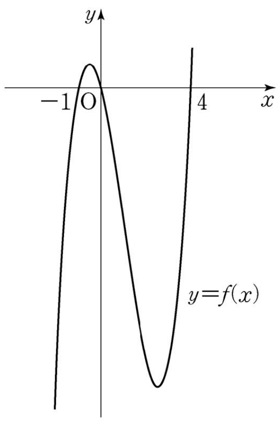
① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

[TIP32] 방정식과 접선

방정식의 항을 적당히 넘겨서 $f(x)=ax+b$를 만들면 접선 문제가 된다.
이 문항은 $f(x)-ax=b$에서 함수 $g(x)=f(x)-ax$의 그래프를 그리면
충분하지만 왠지 $f(x)=ax+b$가 땡길 때가 있다.

예제 056 [2015학년도 수능(A형) 14번]

함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$에 대하여 직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?[56)]



① 5　　② $\frac{11}{2}$　　③ 6

④ $\frac{13}{2}$　　⑤ 7

[TIP33] 부등식의 증명

그래프 그리면 풀려.

예제 057 [2020학년도 6월(나형) 27번]

두 함수

$$f(x)=x^3+3x^2-k, \qquad g(x)=2x^2+3x-10$$

에 대하여 부등식

$$f(x) \geq 3g(x)$$

가 닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.57)

[TIP34] 함수의 최대최소

그래프 그리면 풀려.

예제 058 [2017학년도 6월(나형) 28번]

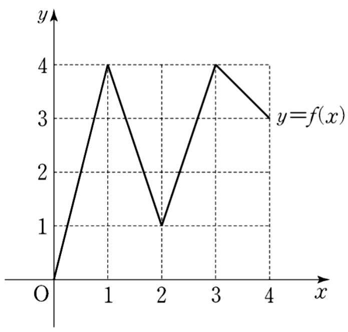
양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하여라.[58)]

[TIP35] 방정식 f(f(x))=f(x)

$f(x)=x$의 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$를 찾고
$f(x)=\alpha,\ f(x)=\beta,\ f(x)=\gamma,\ \cdots$를 푼다.

예제 059 [2018학년도 수능(나형) 21번]

그림과 같이 닫힌 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는
점 (0, 0), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (4, 3)을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a,\ b\}$의 개수는?[59] (단, $0 \le a < b \le 4$)

> X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하고
> $g(a)=f(a),\ g(b)=f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[TIP36] 역함수와의 교점1

증가하는 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$ 위에서만 만난다.

예제 060

양의 실수 전체의 집합을 정의역과 공역으로 하는 함수

$$f(x)=x^4-ax^3+3x^2 \ (x>0)$$

에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근 중 양수인 것의 개수는 1이고 함수 $|f(x)-x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 값은?[60)]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[TIP37] 역함수와의 교점2

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=g(x)$의 근은 다음의 두 종류이다.

① $f(a)=g(a)=a$일 때

② $f(a)=b$, $f(b)=a$일 때 (단, $a \neq b$)

②의 경우는 $f(x)$가 증가할 때는 발생하지 않는다.

예제 061 [2019학년도 6월(나형) 29번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하여라.61) (단, a, b, c는 상수이다.)

예제 062 [2019학년도 9월(나형) 30번]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하여라.[62] (단, $1 < a < 2 < b$)

[TIP38] 새롭게 정의된 함수

알아서 잘.

예제 063 [2011학년도 9월 16번]

함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?63)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

예제 064 [한성은 IS7868번]

함수 $f(x)=x(x-6)^2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$는 $t \le x \le t+1$에서 $f(x)$의 최댓값이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[64)]

ㄱ. 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에 속하는 실수 x에 대하여 $g'(x)=0$이다.
ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때, $f(a)=f(a+1)$이다.
ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x^2}=-3$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP39] 구간별로 선택

알아서 잘.

예제 065 [2020학년도 9월 20번]

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$
(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$
(다) $f(x)g(x)=(x^2+1)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?65)

① $\frac{23}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{29}{6}$
④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

[TIP40] 평균값의 정리

넣을 데가 없네.

예제 066 [2020학년도 9월(나형) 21번]

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?66) (단, a, b는 상수이다.)

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP41] 위치와 속도

시각 t에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x(t)$일 때,
점 P의 속도는 $x'(t)$, 속력은 $|x'(t)|$이다.

예제 067 [2019학년도 9월(나형) 14번]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - 5t^2 + at + 5$$

이다. 점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않도록 하는 자연수 a의 최솟값은?[67)]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

예제 068 [2020학년도 수능(나형) 27번]

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$$x_1 = t^3 - 2t^2 + 3t, \quad x_2 = t^2 + 12t$$

이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하여라.[68)]

[TIP42] 가속도

시각 t에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 위치가 $x(t)$일 때,
점 P의 가속도는 $x''(t)$이다.

예제 069 [2019학년도 수능(나형) 27번]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + k\ (k\text{는 상수})$$

이다. 점 P의 가속도가 0일 때, 점 P의 위치는 40이다. k의 값을 구하여라.[69]

1) ③

2) 24

3) ⑤

4) ④

5) 28

6) 16

7) 8

8) ①

9) ⑤

10) 186

11) ②

12) 30

13) ④

14) ④

15) ⑤

16) ②

17) 51

18) ②

19) ①

20) 32

21) 5

22) 3

23) 31

24) ⑤

25) ②

26) ⑤

27) ④

28) ③

29) 243

30) ①

31) ④

32) ⑤

33) ④

34) ④

35) ⑤

36) ③

37) 9

38) 147

39) 12

40) 24

41) 42

42) ⑤

43) 10

44) ③

45) ③

46) 105

47) 32

(가)에서 함수 $g(a+4)=0$이고 $g'(a+4)\neq 0$이다.

$g(2)=0$, $g'(2)=0$이므로 $g(x)=\frac{1}{4}(x-2)^3(x-a-4)$가 되겠군.

곡선 $y=g(2a-x)$는 곡선 $y=g(x)$를 직선 $x=a$에 대하여 대칭이동 시킨 것이다.
$|g(x)g(2a-x)|$가 미분가능하려면 a가 2와 $a+4$의 가운데 놓여야겠다. $2a=2+(a+4)$에서 $a=6$이다.

$g(x)=\frac{1}{4}(x-2)^3(x-10)$이고 $f(x)=(x-2)^2(x-8)$이다.

48) ③

49) ⑤

50) ③

51) ⑤

52) ④

53) ①

54) ②

55) ①

56) ①

57) 3

58) 12

59) ②

60) ④

61) 20

62) 40

63) ①

64) ⑤

65) ③

66) ⑤

67) ①

68) 27

69) 22