# [T] ToolBOX+

수능수학 최적화 도구상자

## 함수의 극한과 연속

5A ACADEMY

SOOHAN

# [TIP01] 치환

$f(\star)$가 있으면 $\star$를 치환하자. 머리쓰지 말고.

## 예제 001

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$가 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{h}=5$를 만족시킬 때, $10(a+b)$의 값을 구하여라.[1] (단, $a$, $b$는 상수)

## 예제 002 [2017년 10월(나형) 17번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=a, \quad \lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?[2] (단, $a$는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

# [TIP02] 연산

수렴할 때는 찢을 수 있다.

## 예제 003 [2017학년도 9월(나형) 10번]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-4)f(x)}{x-2} = 12$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?[3)]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

## 예제 004 [한성은 RW444번]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 상수 $a$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

(나) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = 3$

$\lim_{x \to a} \left( \frac{\{g(x)\}^2}{f(x)} + \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} \right)$의 값은?[4)]

① 9　② 6　③ 3
④ $-6$　⑤ $-9$

# [TIP03] 극한값의 연산

중요한 내용이긴 한데, 출제되지는 않겠지?

※ $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$가 존재하면 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. (거짓)

※ $\lim_{x \to a} f(x)$는 존재하고, $\lim_{x \to a}\{f(x)+g(x)\}$는 존재하지 않으면, $\lim_{x \to a} g(x)$는 존재하지 않는다. (참)

## 예제 005

실수 $a$와 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[5)]

ㄱ. $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$가 모두 존재하면 $\lim_{x \to a} g(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x \to a} g(x)$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모두 존재하면 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x \to a} f(x)=0$, $\lim_{x \to a} g(x)=0$이면 $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

# [TIP04] 샌드위치정리

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) < g(x)$이면 $\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$이다.

※ 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x) < g(x)$이면 $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$이다. (거짓)

## 예제 006 [한성은 PO6795번]

함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여

$$x^2 - 4x + 5 \le f(x) \le 2x^2 - 6x + 6$$

를 만족시킨다. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b$일 때, $ab$의 값은?[6)]

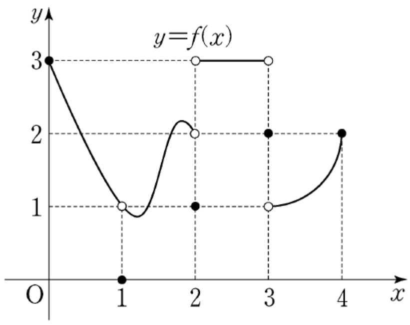
① $-2$　② $-4$　③ $-6$
④ $-8$　⑤ $-10$

# [TIP05] 그래프에서

잘.

## 예제 007

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

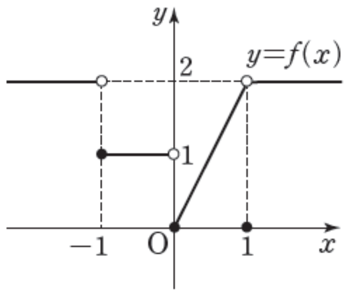



$\lim_{x \to 0+} \{f(x)+f(1+x)+f(2+x)\}$의 값은?[7)]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

## 예제 008

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to0-} f(-x)$의 값은?[8)]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$

④ $1$ ⑤ $2$

# [TIP06] 다항식의 최고차항

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$는 최고차항에 대한 정보를 준다.

## 예제 009 [2016학년도 9월(A형) 28번]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.[9)]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} f(x) = -7$

## 예제 010 [한성은 IT3910번]

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{g(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=2$

(나) $\lim_{x\to\infty}\{x\times g(x)\}=2$

$f(2)$의 값을 구하여라.[10)]

## [TIP07] 다항식의 최저차항

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$는 최저차항에 대한 정보를 준다.

### 예제 011 [2020학년도 6월(나형) 20번]

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)$의 최댓값은?[11)]

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 $n$이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

## 예제 012 [한성은 JF9984번]

다항함수 $f(x)$와 자연수 $n$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^{n+1}+1} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 4$

$f'(1) = 20$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.[12)]

# [TIP08] 다항식의 극한과 인수

다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이면
다항식 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 가진다.

## 예제 013 [2015학년도 6월(A형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=0$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?[13)]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

## 예제 014 [한성은 JS0185번]

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to n} \frac{(x-2)g(x)}{(x-1)f(x)} = n(n-1) \ (n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

일 때, $f(5)$의 값은?[14)]

① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

# [TIP09] 인수와 미분계수

인수로 푸는 것이 편할 때도 있고,
미분계수로 푸는 것이 편할 때도 있다.

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a} = b$이면

$\Rightarrow$ $f(a)=0$, $f'(a)=b$이다.

$\Rightarrow$ $f(x)=(x-a)^2 Q(x)+b(x-a)$이다.

## 예제 015 [2020학년도 9월(나형) 16번]

다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \quad \lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

를 만족시킨다. $f(1) \le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값은?15)

① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

## 예제 016 [2017학년도 수능(나형) 18번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은?16) (단, $a$는 상수이다.)

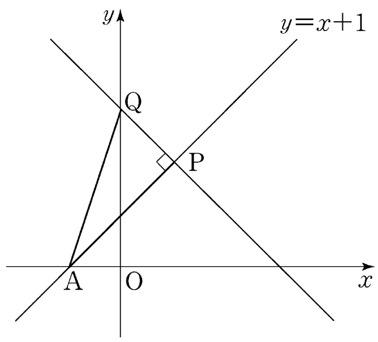
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

# [TIP10] 그래프와 극한

보이는 대로

## 예제 017 [2012학년도 수능(나형) 12번]

그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$과 $\mathrm{P}(t,\ t+1)$이 있다. 점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 $y$축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}$의 값은?17)

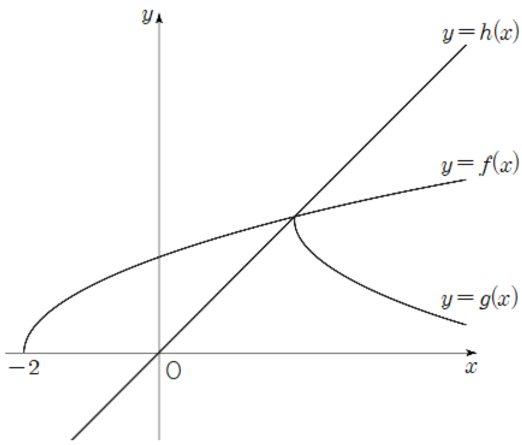



① 1　　② $\dfrac{3}{2}$　　③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤ 3

## 예제 018 [2016년 4월(나형) 14번]

세 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=-\sqrt{x-2}+2$, $h(x)=x$의 그래프가 그림과 같다.
함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a)$를 지나고 $x$축에 평행한 직선이
함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 A, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을
B라 하자. 점 B를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는
점을 C라 할 때, $\lim_{a \to 2-} \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?[18] (단, $0<a<2$)




① $\frac{1}{5}$　　② $\frac{1}{4}$　　③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $1$

# [TIP11] 그래프와 극한(원 관련)

알아서.

## 예제 019 [한성은 OL3407번]

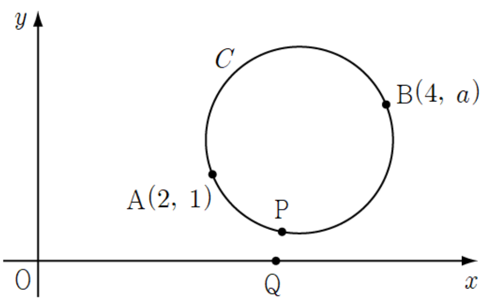
점 $(t,\ 2)$를 중심으로 하고 $y$축에 접하는 원 $C$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to \infty} tf(t)$의 값은?[19)]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

## 예제 020 [한성은 TM7588번]

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$과 점 $\mathrm{B}(4,\ a)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원을 $C$라 하자. 원 $C$ 위의 점 P와 $x$축 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 최솟값을 $f(a)$라 할 때, $\lim\limits_{a \to 1+} \frac{f(a)}{a-1}$의 값은?[20)]




① $\frac{5}{2}$ ② 2

③ $\frac{3}{2}$ ④ 1

⑤ $\frac{1}{2}$

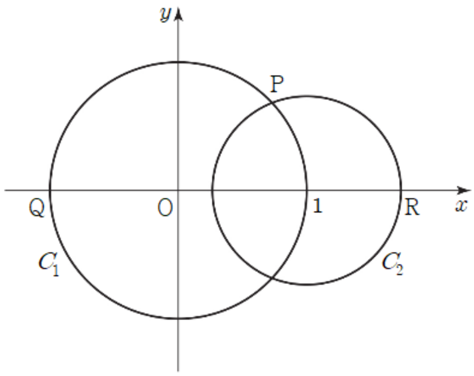
## 예제 021 [2014년 4월(나형) 14번]

그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$C_1 : x^2 + y^2 = 1$

$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = r^2 \ (0 < r < \sqrt{2})$

이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자.




점 P의 $x$좌표를 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r \to \sqrt{2}-} \frac{f(r)}{4-r^4}$의 값은?[21)]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$

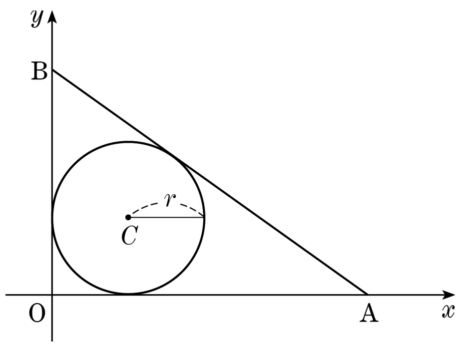
④ 2　⑤ 4

# [TIP12] 극한의 기하적 의미

잘 못 쓰다가 털리긴 하는데, 일단 도전해보고.

## 예제 022 [2013년 10월(나형) 18번]

그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 3)$에 대하여 삼각형 $\mathrm{OAB}$에 내접하는 원 $C$가 있다. 원 $C$의 반지름의 길이를 $r$라 할 때, $\lim_{a \to 0+} \dfrac{r}{a}$의 값은?[22] (단, $\mathrm{O}$는 원점이다.)



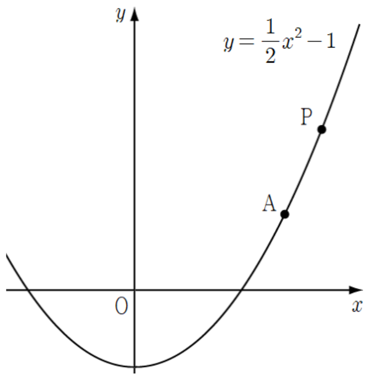

① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{5}$　③ $\dfrac{1}{4}$

④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{1}{2}$

## 예제 023 [한성은 OZ6281번]

그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2-1$ 위에 두 점 $A(2,\ 1)$와 $P\left(t,\ \frac{1}{2}t^2-1\right)$가 있다.

$\lim\limits_{t \to 2+} \frac{\overline{AP}}{t-2}$의 값은?[23]




① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$

④ 4　　⑤ $\sqrt{5}$

# [TIP13] 연산된 함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프에서부터
함수 $y=g(f(x))$의 그래프를 유추할 수 있다.
연습하자.

## 예제 024 [한성은 IG3478번]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 1) \\ 2x+a & (x>1) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 $x=b$에서 극댓값을 갖는다. $ab$의 값은?[24) (단, $a$와 $b$는 상수이다.)

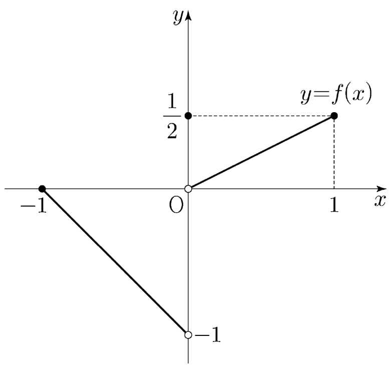
① $-2$ ② $-4$ ③ $-6$
④ $-8$ ⑤ $-10$

# [TIP14] 절댓값 함수의 그래프

접어 올리고.

## 예제 025 [2019학년도 9월(나형) 18번]

닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$가

$$g(x)=f(x)+|f(x)|, \quad h(x)=f(x)+f(-x)$$

일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[25)]

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(x)=0$
ㄴ. 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

## [TIP15] 연속의 의미

극한값과 함숫값이 같다.
$\Leftrightarrow$ 좌극한, 우극한, 함숫값이 모두 같다.

## 예제 026 [2020학년도 9월(나형) 23번]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이고

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = a+2, \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = 3a-2$$

를 만족시킬 때, $a+f(2)$의 값을 구하여라.[26] (단, $a$는 상수이다.)

## 예제 027 [2018학년도 6월(나형) 14번]

함수

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+a}{x-3} & (x \neq 3) \\ b & (x=3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은?[27] (단, $a$와 $b$는 상수이다.)

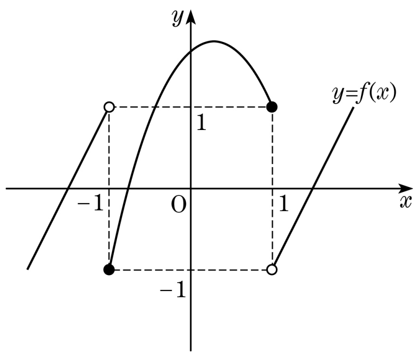
① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

# [TIP16] 연속성 판단

좌극한, 우극한, 함숫값.

## 예제 028 [2013년 10월(나형) 16번]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[28)]

ㄱ. $\lim_{x\to -1-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = 0$

ㄴ. $\lim_{x\to 1} f(-x)$는 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# [TIP17] 연속/연속의 연속성

분모가 0이 아닐 때,

## 예제 029 [2019학년도 6월(나형) 28번]

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하여라.[29)]

## 예제 030 [2019학년도 수능(나형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?[30)]

① $\frac{5}{13}$　② $\frac{5}{14}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{16}$　⑤ $\frac{5}{17}$

# [TIP18] 연속*불연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속,
함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $g(a)=0$이다.

## 예제 031

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},$$
$$g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 $a$의 값은?[31)]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$
④ $1$ ⑤ $2$

## 예제 032 [한성은 BK6364번]

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}|x-a| & (|x-a|\le 1)\\ -|x-a| & (|x-a|>1)\end{cases},$$

$$g(x)=x^2-4x+b$$

이다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $ab$의 값을 구하여라.[32)]

# [TIP19] 근의 개수로 정의된 함수

알아서 잘.

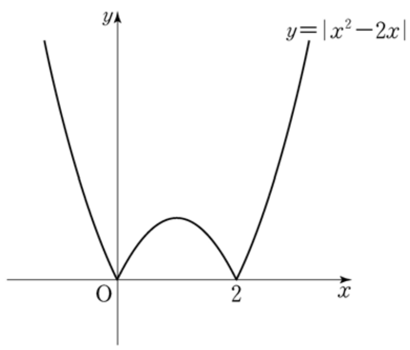
## 예제 033 [2012학년도 6월(나형) 18번]

실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 1-} f(t)$의 값은?33)

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

## 예제 034 [2016학년도 6월(A형) 29번]

실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 $t$에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하여라.34)



1) 25
2) ④
3) ③
4) ⑤
5) ②
6) ②
7) ⑤
8) ⑤
9) 13
10) 36
11) ③
12) 64
13) ⑤
14) ⑤
15) ③
16) ④
17) ③
18) ②
19) ④
20) ⑤
21) ①
22) ⑤
23) ⑤
24) ②
25) ③
26) 6
27) ④
28) ③
29) 24
30) ①
31) ④
32) 6
33) ④
34) 8