



TooLBOX⁺
수능수학 최적화 도구상자
지수함수와 로그함수

CLAVIS EDU
SOOHAN



[TIP01] 거듭제곱근의 개수

a 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 아래 표와 같다.

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n 이 짝수	2개	1개	0개
n 이 홀수	1개	1개	1개

예제 001

자연수 n 에 대하여 $n(n-4)$ 의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$ 이라 하고,
 $n(n-4)$ 의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$ 이라 하자. $f(n) > g(n)$ 을 만족시키는
모든 n 의 값의 합은?¹⁾

- ① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8



[TIP02] 지수의 확장 and 연산

잘 한다.

예제 002

두 실수 a, b 에 대하여 $2^a = 3, 6^b = 5$ 일 때, 2^{ab+a+b} 의 값은?2)

- ① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

예제 003

2 이상의 자연수 n 에 대하여 $(\sqrt{3^n})^{\frac{1}{2}}$ 과 $\sqrt[n]{3^{100}}$ 이 모두 자연수가 되도록 하는 모든 n 의 값의 합을 구하여라.3)



[TIP03] 로그의 정의

$a^x = b$ 이면 $x = \log_a b$ 이다.

예제 004

양수 a 에 대하여 $\log_2 \frac{a}{4} = b$ 일 때, $\frac{2^b}{a}$ 의 값은? ⁴⁾

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



[TIP04] 로그가 정의되는 조건

$\log_a b$ 는 $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ 일 때만 정의된다.

예제 005

$\log_x(-x^2 + 4x + 5)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 구하여라.⁵⁾

예제 006

모든 실수 x 에 대하여 $\log_a(x^2 + 2ax + 5a)$ 가 정의되기 위한 모든 정수 a 의 값의 합은?⁶⁾

- ① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17



[TIP05] 로그의 연산

잘 한다.

예제 007 [2020학년도 9월(나형) 28번]

네 양수 a, b, c, k 가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2 의 값을 구하여라.7)

(가) $3^a = 5^b = k^c$

(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a + b)$

예제 008 [2020학년도 수능(나형) 17번]

자연수 n 의 양의 약수의 개수를 $f(n)$ 이라 하고, 36의 모든 양의 약수를

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 하자. $\sum_{k=1}^9 \{(-1)^{f(a_k)} \times \log a_k\}$ 의 값은?8)

① $\log 2 + \log 3$

② $2\log 2 + \log 3$

③ $\log 2 + 2\log 3$

④ $2\log 2 + 2\log 3$

⑤ $3\log 2 + 2\log 3$



[TIP06] 로그의 밑 변환

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ 와 } a^{k \log_b c} = c^{k \log_b a} \text{ 에 의해 잘}$$

예제 009 [2020학년도 6월(나형) 8번]

$\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, $\log_5 12$ 를 a , b 로 옳게 나타낸 것은?9)

- ① $\frac{1}{a} + b$ ② $\frac{2}{a} + b$ ③ $\frac{1}{a} + 2b$
 ④ $a + \frac{1}{b}$ ⑤ $2a + \frac{1}{b}$

예제 010 [2018학년도 9월(나형) 13번]

두 실수 a , b 가

$$ab = \log_3 5, \quad b - a = \log_2 5$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ 의 값은?10)

- ① $\log_5 2$ ② $\log_3 2$ ③ $\log_3 5$
 ④ $\log_2 3$ ⑤ $\log_2 5$



[TIP07] 지수/로그함수의 활용

잘 대입.

예제 011 [2016년도 수능 10번]

어느 금융상품에 초기자산 W_0 을 투자하고 t 년이 지난 시점에서의 기대자산 W 가 다음과 같이 주어진다고 한다.

$$W = \frac{W_0}{2} 10^{at} (1 + 10^{at}) \quad (\text{단, } W_0 > 0, t \geq 0 \text{이고, } a \text{는 상수이다.})$$

이 금융상품에 초기자산 w_0 을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0 을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k 배일 때, 실수 k 의 값은?¹¹⁾ (단, $w_0 > 0$)

- ① 9 ② 10 ③ 11
 ④ 12 ⑤ 13



예제 012 [2016학년도 9월 25번]

고속철도의 최고소음도 $L(\text{dB})$ 을 예측하는 모형에 따르면 한 지점에서 가까운 선로 중앙 지점까지의 거리를 $d(\text{m})$, 열차가 가까운 선로 중앙 지점을 통과할 때의 속력을 $v(\text{km/h})$ 라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$L = 80 + 28\log\frac{v}{100} - 14\log\frac{d}{25}$$

가까운 선로 중앙 지점 P까지의 거리가 75m인 한 지점에서 속력이 서로 다른 두 열차 A, B의 최고소음도를 예측하고자 한다. 열차 A가 지점 P를 통과할 때의 속력이 열차 B가 지점 P를 통과할 때의 속력의 0.9배일 때, 두 열차 A, B의 예측 최고소음도를 각각 L_A , L_B 라 하자. $L_B - L_A$ 의 값은?12)

- ① $14 - 28\log 3$ ② $28 - 56\log 3$ ③ $28 - 28\log 3$
④ $56 - 84\log 3$ ⑤ $56 - 56\log 3$



[TIP08] 기하급수적 증감

한 턱당 몇배인지 찾는다.

예제 013

우라늄 U^{237} 은 일정한 비율로 붕괴되어, 7일 후에는 절반이 된다고 한다.

며칠 후에 처음 양의 $\frac{1}{10}$ 이하가 되겠는가?¹³⁾ (단, $\log 2 = 0.3010$)



예제 014

어떤 도시의 총 인구에서 마라톤을 즐기는 동호인이 차지하는 비율이 10% 이상인 도시를 '마라톤 도시'라고 하자. 2005년 M도시의 총 인구는 10만 명이고 마라톤 동호인의 수는 4천 명이었다. M도시의 총 인구는 매년 전년도보다 0.2%씩 증가하고 마라톤 동호인의 수는 매년 전년도보다 5%씩 증가한다고 가정할 때, 처음으로 '마라톤 도시'가 될 것으로 예측되는 시기는?¹⁴⁾ (단, $\log 1.05 = 0.021$, $\log 1.002 = 0.0008$, $\log 2 = 0.3010$ 으로 계산한다.)

- ① 2010년~2012년 ② 2015년~2017년 ③ 2024년~2026년
④ 2030년~2032년 ⑤ 2034년~2036년



[TIP09] 상용로그의 정수/소수부분

먼저 정수부분을 적당히 찾는다. 소수부분은 원래의 값과의 차이로
⇒ 정수부분은 정수, 소수부분은 0 이상 1 미만이다.

예제 015

등식 $[\log x] = 3(\log x - [\log x])$ 를 만족시키는 모든 양수 x 의 값의 곱을 A 라 할 때,
 $10\log A$ 의 값을 구하여라.¹⁵⁾ (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



[TIP10] 정수부분과 소수부분의 표현

$\log x$ 의 정수부분이 n , 소수부분이 α 일 때,

① $[\log x] = n, \log x - [\log x] = \alpha$

② $A = a \times 10^m$ ($1 \leq a < 10, m$ 은 정수)이면 $\log a = \alpha, m = n$

예제 016

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 소수부분을 $f(x)$ 라 할 때, $f(2x) \leq f(x)$ 를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x 의 개수는?16)

- ① 55 ② 57 ③ 59
 ④ 61 ⑤ 63

예제 017

양의 정수 n 에 대하여 $\log n$ 의 정수부분을 $f(n)$, 소수부분을 $g(n)$ 이라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 양의 정수 n 의 개수는?17)

(가) $f(3) < f(n) < f(2011)$

(나) $\{g(n)\}^2 - g(n) + \log 2 \cdot \log 5 < 0$

- ① 326 ② 328 ③ 330
 ④ 332 ⑤ 334



[TIP11] 정수부분과 소수부분의 의미

$\log A$ 의 정수부분이 n 이면

① A 는 $n+1$ 자리의 수이다. ($n \geq 0$)

② A 는 소수점 이하 n 번째 자리부터 0이 아닌 숫자가 등장한다. ($n < 0$)

$\log A$ 와 $\log B$ 의 소수부분이 서로 같으면, $A = B \times 10^n$ 이다.

예제 018

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, $f(A) = f(255.4)$, $g(A) = g(0.423)$ 을 만족시키는 A 의 값을 구하여라.¹⁸⁾

예제 019

4^m 이 8자리의 정수가 되도록 하는 모든 자연수 m 의 값의 합을 구하여라.¹⁹⁾
(단, $\log 2 = 0.301$ 로 계산한다.)



[TIP12] 정수부분과 소수부분의 연산

- ① 정수부분 n 은 정수
- ② 소수부분 α 는 $0 \leq \alpha < 1$

예제 020

$\log x$ 의 정수부분이 4이고 $\log x$ 와 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수부분의 합이 1이 될 때, $4\log x$ 의 값을 구하여라.²⁰⁾

예제 021

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 x 의 값의 곱은?²¹⁾

(가) $f(x) + 3g(x)$ 의 값은 정수이다.

(나) $f(x) + f(x^2) = 6$

- ① 10^4
- ② $10^{\frac{13}{3}}$
- ③ $10^{\frac{14}{3}}$
- ④ 10^5
- ⑤ $10^{\frac{16}{3}}$



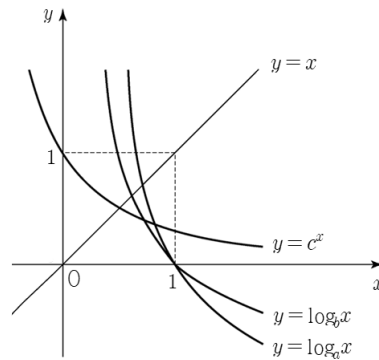
[TIP13] 지수/로그함수의 그래프

$y = a^x$ 와 $y = \log_a x$ 는

- ① $a > 1$ 일 때 증가함수이고, $0 < a < 1$ 일 때 감소함수이다.
- ② a 가 1에서 멀수록 각각 $y=1$, $x=1$ 에서 멀어진다.

예제 022

그림은 1이 아닌 세 양수 a, b, c 에 대하여 세 함수 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = c^x$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 세 양수 a, b, c 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?22)



- ① $a > b > c$
- ② $a > c > b$
- ③ $b > a > c$
- ④ $b > c > a$
- ⑤ $c > b > a$

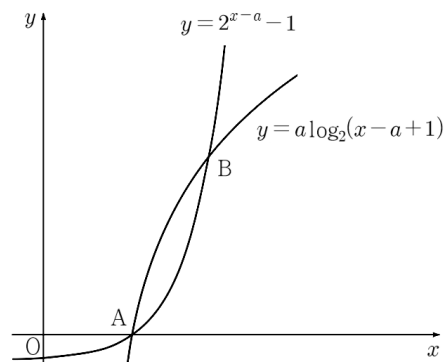


[TIP14] 지수/로그함수의 평행이동

알아서.

예제 023

그림과 같이 $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 두 곡선 $y = a \log_2(x - a + 1)$ 과 $y = 2^{x-a} - 1$ 이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가 x 축 위에 있고 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$ 일 때, 선분 AB의 중점은 $M(p, q)$ 이다. $p+q$ 의 값은? ²³⁾ (단, O는 원점이다.)



- ① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$
 ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

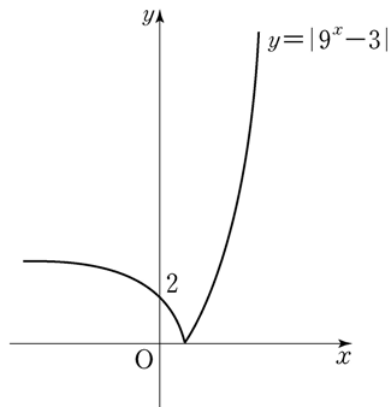


[TIP15] 지수/로그함수의 점근선

- ① 지수함수 : y 축 평행이동한 정도
- ② 로그함수 : 진수조건(정의역)에서

예제 024 [2016학년도 6월]

좌표평면 위의 두 곡선 $y = |9^x - 3|$ 과 $y = 2^{x+k}$ 이 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 라 할 때, $x_1 < 0, 0 < x_2 < 2$ 를 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합은? ⁽²⁴⁾



- ① 8
- ② 9
- ③ 10
- ④ 11
- ⑤ 12



[TIP16] 지수/로그함수의 역함수

$y = a^x$ 와 $y = \log_a x$ 는 서로 역함수이다.

$\Rightarrow (p, q)$ 가 $y = a^x$ 위의 점이면 (q, p) 는 $y = \log_a x$ 위의 점이다.

예제 025 [한성은 FH1495번]

함수 $f(x) = 2^x + a$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 의 점근선과 곡선 $y = g(x)$ 의 교점을 A, 점 A를 지나고 기울기가 -1 인 직선과 곡선 $y = f(x)$ 의 교점을 B라 하자.

$\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은? ²⁵⁾

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

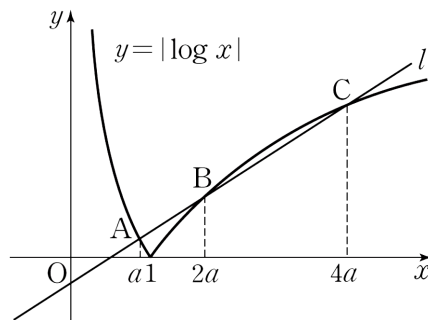


[TIP17] 곡선 위의 점

점 (a, b) 가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이면 $b = f(a)$ 이다.

예제 026

그림과 같이 함수 $y = |\log x|$ 의 그래프와 직선 l 의 세 교점 A, B, C의 x 좌표가 각각 $a, 2a, 4a$ 일 때, 직선 l 의 y 절편은? (단, $\frac{1}{2} < a < 1$)



- ① $-\log 2$ ② $-\frac{3}{4}\log 2$ ③ $-\frac{1}{2}\log 2$
 ④ $-\frac{1}{4}\log 2$ ⑤ $-\frac{1}{8}\log 2$





[TIP18] 로그함수의 그래프2

웬지 킬러문항.

예제 027 [2019학년도 6월 14번]

직선 $x = k$ 가 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = -\log_2(8 - x)$ 와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

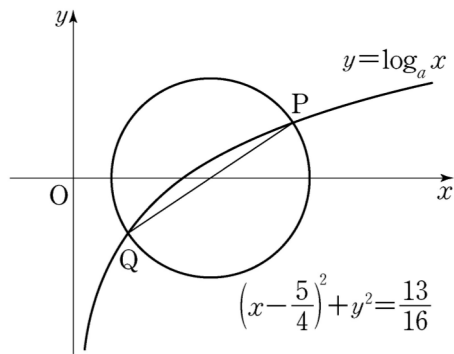
$\overline{AB} = 2$ 가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 곱은? (단, $0 < k < 8$)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$



예제 028 [2018학년도 9월 16번]

$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 곡선 $y = \log_a x$ 와 원 $C: \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{13}{16}$ 의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가 원 C의 지름일 때, a 의 값은? (28)



① 3

② $\frac{7}{2}$

③ 4

④ $\frac{9}{2}$

⑤ 5



[TIP19] 내분점/외분점

세 점 A, B, C와 각각의 점에서 x 축에 내린 수선의 발을 A' , B' , C' 이라 하자.

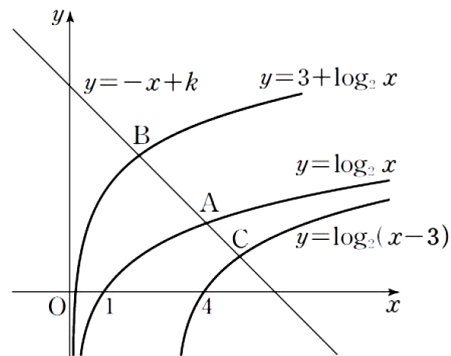
$\overline{AB} : \overline{BC} = m : n$ 이면 $\overline{A'B'} : \overline{B'C'} = m : n$ 이고

이를 이용하여 A, B, C의 x 좌표를 예쁘게 설정할 수 있다.

예제 029

그림과 같이 좌표평면에서 세 곡선 $y = \log_2 x$, $y = 3 + \log_2 x$, $y = \log_2(x-3)$ 이

직선 $y = -x + k$ 와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자. $\overline{AB} = 2\overline{AC}$ 일 때, 상수 k 의 값은? ²⁹⁾



① $\frac{21}{4}$

② $\frac{11}{2}$

③ $\frac{23}{4}$

④ 6

⑤ $\frac{25}{4}$



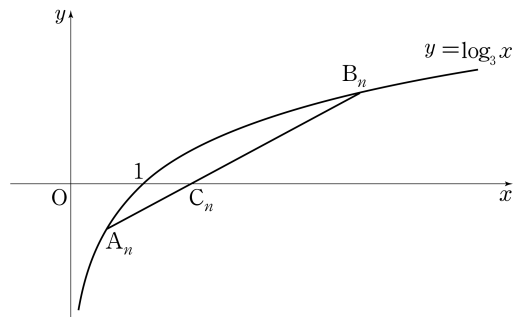
예제 030

2 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프 위의 x 좌표가 $\frac{1}{n}$ 인 점을 A_n 이라 하자. 그래프 위의 점 B_n 과 x 축 위의 점 C_n 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n 은 선분 $A_n B_n$ 과 x 축의 교점이다.

(나) $\overline{A_n C_n} : \overline{C_n B_n} = 1 : 2$

점 C_n 의 x 좌표를 n 에 대한 식으로 바르게 나타낸 것은?30)



- ① $\frac{n^3 + 2}{3n}$ ② $\frac{n^3 + 3}{3n}$ ③ $\frac{n^3 + 4}{3n}$
 ④ $\frac{2n^3 + 2}{3n}$ ⑤ $\frac{3n^3 + 2}{3n}$

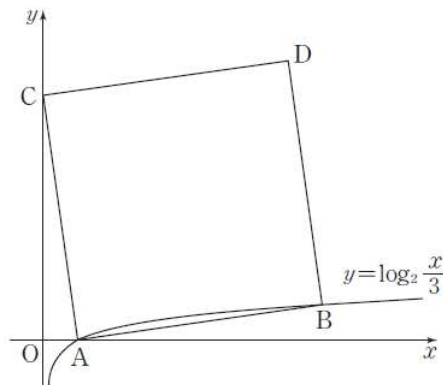


[TIP20] 90도 회전

점 (a, b) 를 원점을 중심으로 반시계방향으로 90° 회전시킨 점은 $(-b, a)$ 이다.

예제 031

그림과 같이 곡선 $y = \log_2 \frac{x}{3}$ 가 x 축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y = \log_2 \frac{x}{3}$ 위의 제1사분면에 있는 점 B와 y 축 위의 점 C에 대하여 사각형 ABDC가 정사각형일 때, 점 D의 y 좌표는?³¹⁾



- ① 16
④ 22

- ② 18
⑤ 24

- ③ 20



예제 032

함수 $y = 3^x$ 의 그래프 위의 x 좌표가 양수인 점 A와 함수 $y = -\log_3 x$ 의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{OA} = 2\overline{OB}$
(나) $\angle AOB = 90^\circ$

직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.)

- ① $\log_3 2$ ② $2\log_3 2$ ③ $3\log_3 2$
④ $\log_2 3$ ⑤ $2\log_2 3$



[TIP21] 식의 의미와 대소비교

기울기라든가 뭐 그런거.

예제 033

지수함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 이 만나는 두 점을 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? ³³⁾ (단, $r > 1$ 이고 $x_1 < x_2$ 이다.)

ㄱ. $x_1 + x_2 < 0$

ㄴ. $x_1x_2 + y_1y_2 > r^2$

ㄷ. $x_1 - y_1 < x_2 - y_2$

① ㄱ

② ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[TIP22] 격자점

안 나오겠지?

예제 034 [2015학년도 9월]

다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하여라.³⁴⁾

(가) $1 \leq a \leq 100, 1 \leq b \leq 100$

(나) 곡선 $y = 2^x$ 이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ 과 만나지 않는다.

(다) 곡선 $y = 2^x$ 이 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ 와 적어도 한 점에서 만난다.



[TIP23] 세는 문제

안 나오겠지?

예제 035 [2015학년도 수능]

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB 의 개수를 $f(n)$ 이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$ 의 값을 구하여라.³⁵⁾

- (가) 점 A 의 좌표는 $(-2, 3^n)$ 이다.
- (나) 점 B 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, a 와 b 는 자연수이고 $b \leq \log_2 a$ 를 만족시킨다.
- (다) 삼각형 OAB 의 넓이는 50 이하이다.



[TIP24] 방정식/부등식

밑 통일

예제 036 [2016학년도 9월 8번]

로그방정식 $\log_2(4+x) + \log_2(4-x) = 3$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱은? ⁽³⁶⁾

- ① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

예제 037 [2019학년도 6월 7번]

부등식 $\frac{27}{9^x} \geq 3^{x-9}$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 개수는? ⁽³⁷⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5



[TIP25] 부등식과 그래프

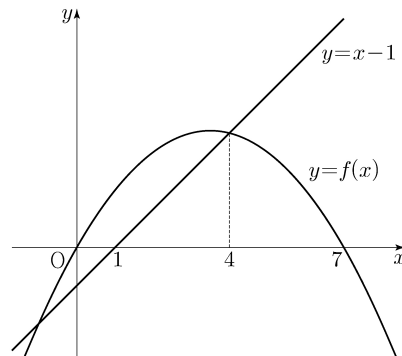
밑 통일

예제 038 [2020학년도 6월 24번]

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x - 1$ 이 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_3 f(x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leq 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하여라.³⁸⁾ (단, $f(0) = f(7) = 0$, $f(4) = 3$)



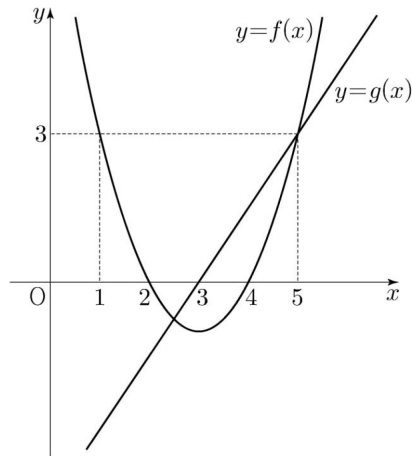


예제 039 [2019학년도 수능 14번]

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 일차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합은?39)



- ① 7
- ② 9
- ③ 11
- ④ 13
- ⑤ 15



[TIP26] 지수/로그함수의 치환

범위 조심.

예제 040 [2014학년도 6월(나형) 27번]

방정식 $x^{\log_2 x} = 8x^2$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.⁴⁰⁾

예제 041

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$4^x - a \times 2^x + a + 3 > 0$$

이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 개수는?⁴¹⁾

- ① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10



-
- 1) ③
 - 2) ①
 - 3) 124
 - 4) ③
 - 5) 9
 - 6) ①
 - 7) 75
 - 8) ①
 - 9) ②
 - 10) ④
 - 11) ②
 - 12) ②
 - 13) 24
 - 14) ③
 - 15) 40
 - 16) ①
 - 17) ②
 - 18) 423
 - 19) 25
 - 20) 18
 - 21) ②
 - 22) ①
 - 23) ⑤
 - 24) ②
 - 25) ③
 - 26) ④
 - 27) ②
 - 28) ③
 - 29) ④
 - 30) ①
 - 31) ⑤
 - 32) ⑤
 - 33) ③
 - 34) 196
 - 35) 120
 - 36) ②
 - 37) ④
 - 38) 15

39) ④

40) 4

41) ④