[T]

ToolBOX+

수능수학 최적화 도구상자

확률 및 통계

CLAVIS EDU

SOOHAN

[TIP01] 수학적 확률

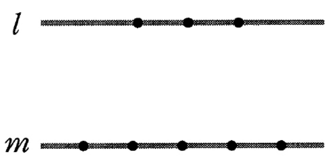
표본공간들의 근원사건들이 일어날 확률이 모두 같을 때,

$$(\text{사건 } A\text{의 확률}) = \frac{(A\text{의 경우의 수})}{(\text{전체 경우의 수})}$$

⇒ '전체 경우의 수'와 '해당 사건의 경우의 수'를 세야 한다.

예제 001

그림과 같이 평행한 두 직선 l, m 위에 각각 3개, 5개의 점이 있다. 이 중 3개의 점을 선택할 때, 선택한 점들이 삼각형을 이루는 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[1]
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[TIP02] 공 꺼내는 시행의 확률

P로 풀 수도 있고, C로 풀 수도 있고, 시행을 나눠서 풀 수도 있다.
$\Rightarrow$ 그냥 C로 풀어.

예제 002 [2017학년도 9월]

흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.2) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

예제 003

1부터 9까지의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 남자 6명과 여자 3명이 공을 차례로 하나씩 꺼낼 때, 여자 3명이 모두 소수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.3) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[TIP03] 확률의 덧셈 정리

① 사건 A와 B에 대하여, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
② 특히, A와 B가 배반이면 $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$
③ 여사건의 확률 : $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^c)$
$\Rightarrow$ 벤다이어그램을 이용하여 나타내는 것에 익숙해지도록 하자.

예제 004

1부터 20까지의 자연수가 각각 적힌 20장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 한 장을 뽑을 때, 2의 배수 또는 3의 배수가 나올 확률은?[4)]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{13}{20}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

예제 005

8명의 학생 중 3명이 남학생이다. 여기서 3명의 대표를 임의로 뽑을 때, 적어도 1명의 남학생이 포함될 확률은?[5)]

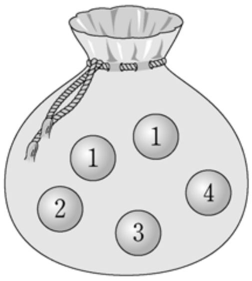
① $\frac{25}{28}$ ② $\frac{23}{28}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{5}{28}$ ⑤ $\frac{3}{28}$

[TIP04] 같은 것이 있는데

확률 할 때는 서로 다른 것으로 취급한다.

예제 006 [2016학년도 9월]

주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률은?[6)]



① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

예제 007 [한성은 TQ7070번]

주머니에 a, a, a, b, b, c의 문자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리는 이웃하지 않게 배열될 확률은?7)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{11}{30}$ ⑤ $\frac{13}{30}$

[TIP05] 분할분배와 확률

원래 좀 헷갈리는 문제이다.
넣는 것, 조를 다 서로 구별되는 것으로 설정하자.

예제 008 [2011학년도 수능]

남자 탁구 선수 4명과 여자 탁구 선수 4명이 참가한 탁구 시합에서 임의로 2명씩 4개의 조를 만들 때, 남자 1명과 여자 1명으로 이루어진 조가 2개일 확률은?8)

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{18}{35}$ ③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{24}{35}$ ⑤ $\frac{27}{35}$

예제 009

흰 구슬 4개, 검은 구슬 6개와 상자 5개가 있다. 각각의 상자에 구슬을 2개씩 임의로 넣을 때, 흰 구슬 중에서 2개만 같은 상자에 들어갈 확률은?[9)]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[TIP06] 확률의 대칭성1

경우의 수의 대칭성에서부터.

예제 010 [한성은 WK1107번]

방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$가

$a<b$

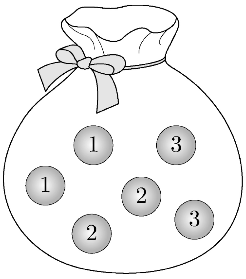
를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.10) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

예제 011 [2020학년도 6월 26번]

숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣지 않는다.
이와 같은 시행을 6번 반복할 때, $k(1 \le k \le 6)$번째 꺼낸 공에 적힌 수를 a_k라 하자.
두 자연수를 m, n을

$$m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3,$$
$$n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6$$

이라 할 때, $m > n$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.11)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[TIP07] 확률의 대칭성2

나머지는 같으니까 고려할 필요 없다든가.

예제 012 [한성은 SA2470번]

1부터 10까지의 자연수를 모두 일렬로 나열하는 시행을 한다. 나열된 수들을 앞에서부터 a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}이라 할 때, $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$을 만족하는 자연수 n의 최댓값을 확률변수 X라고 하자. $\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$의 값은?12)

① $\dfrac{4}{30}$　② $\dfrac{17}{120}$　③ $\dfrac{3}{20}$　④ $\dfrac{19}{120}$　⑤ $\dfrac{1}{10}$

예제 013 [2009학년도 6월]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Z=\{0,\ 1\}$에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f: X \to Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g: Y \to Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g \circ f: X \to Z$를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.13)

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

> (가) X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.
> (나) g의 치역은 Z이다.

[TIP08] 조건부 확률

P$(A|B)$는 [사건 B가 일어날 때 사건 A가 일어날 확률]이다.

예제 014 [한성은 SM8623번]

한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자.
순서쌍 $(a,\ b,\ c)$가 $a<b$를 만족하는 사건을 A, $b<c$를 만족하는 사건을 B라 할 때,
$\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(B|A^c)$의 값은?[14)]

① $\frac{5}{9}$　② $\frac{11}{18}$　③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{13}{18}$　⑤ $\frac{7}{9}$

예제 015 [2019학년도 6월 28번]

자연수 $n(n \geq 3)$에 대하여 집합 A를

$$A = \{(x,\ y) | 1 \leq x \leq y \leq n,\ x\text{와 } y\text{는 자연수}\}$$

라 하자. 집합 A에서 임의로 선택된 한 개의 원소 $(a,\ b)$에 대하여 b가 3의 배수일 때, $a=b$일 확률이 $\frac{1}{9}$이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하여라.[15)]

[TIP09] 조건부 확률 문장제1

통계적인 처리가 필요한 문제 : 닥치고 표

예제 016 [2013학년도 수능]

어느 학교 전체 학생의 60%는 버스로, 나머지 40%는 걸어서 등교하였다. 버스로 등교한 학생의 $\frac{1}{20}$이 지각하였고, 걸어서 등교한 학생의 $\frac{1}{15}$이 지각하였다. 이 학교 전체 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 지각하였을 때, 이 학생이 버스로 등교하였을 확률은?[16)]

① $\frac{3}{7}$　② $\frac{9}{20}$　③ $\frac{9}{19}$

④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{9}{17}$

예제 017 [2014학년도 9월]

휴대 전화의 메인 보드 또는 액정 화면 고장으로 서비스센터에 접수된 200건에 대하여 접수 시기를 품질보증 기간 이내, 이후로 구분한 결과는 다음과 같다.

(단위: 건)

구분	메인 보드 고장	액정 화면 고장	합계
품질보증 기간 이내	90	50	140
품질보증 기간 이후	a	b	60

접수된 200건 중에서 임의로 선택한 1건이 액정 화면 고장 건일 때, 이 건의 접수 시기가 품질보증 기간 이내일 확률이 $\frac{2}{3}$이다. $a-b$의 값을 구하여라.17) (단, 메인 보드와 액정 화면 둘 다 고장인 경우는 고려하지 않는다.)

[TIP10] 조건부 확률 문장제2

선행사건과 후행사건이 명확하게 구별되는 문제 : 확률수형도 그리기

※ 베이즈 법칙 : $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A|B^c)\mathrm{P}(B^c)$

예제 018 [2013학년도 수능]

흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르면 1개의 동전을 3번 던지고, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으면 1개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은?[18)]

① $\frac{9}{28}$　② $\frac{19}{56}$　③ $\frac{5}{14}$

④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{11}{28}$

예제 019

크기와 모양이 같은 흰 공 5개, 검은 공 3개가 들어 있는 상자에서 공을 한 개씩 2번 꺼낸다고 한다. 두 번째에 꺼낸 공이 흰 공이었을 때, 첫 번째에 꺼낸 공도 흰 공이었을 확률은?[19] (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[TIP11] 확률의 곱셈정리

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$
※ 군이 생각하지 않아도 좋다.

예제 020 [한성은 XL9367번]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$를 정의역과 공역으로 하는 일대일 대응 $f:X\to X$ 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 할 때,

$$\max(f(1),\ f(2))<\max(f(3),\ f(4))<\max(f(5),\ f(6))$$

를 만족시킬 확률은?[20] (단, $\max(a,\ b)$는 a와 b 중 작지 않은 수다.)

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[TIP12] 독립의 의미1

① $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)$

$\Rightarrow$ B에서, B^c에서, 전체에서의 A 비율이 항상 일정하다.

② $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow$ 교집합이 두 확률의 곱이다.

예제 021

두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}\left(B^c|A\right)+\mathrm{P}\left(A|B^c\right)=\frac{3}{4}$일 때, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$의 값은?[21)]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[TIP13] 독립의 의미2

$$\mathrm{P}(A):\mathrm{P}(A^c)=\mathrm{P}(A|B):\mathrm{P}(A^c|B)=\mathrm{P}(A|B^c):\mathrm{P}(A^c|B^c)$$

예제 022

어느 지역의 특정 시간에 A, B 두 드라마를 시청하는 20세 미만과 20세 이상인 사람 수를 조사한 표는 다음과 같다. A, B 두 드라마를 시청하는 사람들 중에서 임의로 한 명을 뽑을 때, 이 사람이 A드라마를 시청하는 사람일 사건과 20세 미만인 사람일 사건이 서로 독립이다. c의 값을 구하여라.[22) (단, 조사한 모든 사람은 두 드라마 중 하나만 시청한다.)

	A	B	계(명)
20세 미만	a	b	160
20세 이상	c	d	240
계(명)	250	150	400

[TIP14] 독립인 시행의 확률곱셈

독립사건의 곱셈정리 : A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

예제 023 [2017학년도 6월]

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자.
이차함수 $f(x) = x^2 - 7x + 10$에 대하여 $f(a)f(b) < 0$이 성립할 확률은?[23)]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{5}{18}$

예제 024

동전의 앞면에는 숫자 1, 뒷면에는 숫자 0이 적혀 있다. 이 동전을 6번 던지는 시행에서 나오는 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 하자. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때, $S_3 = 1$이고 $S_6 = 3$이 될 확률은?[24] (단, $1 \leq n \leq 6$)

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{5}{32}$

④ $\frac{9}{64}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

[TIP15] 독립시행의 확률

사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번의 시도 중 A가 k번 일어날 확률은

$${}_{n}\mathrm{C}_{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

이다.

예제 025 [2014학년도 9월]

한 개의 주사위를 A는 4번 던지고 B는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하자. $a+b$의 값이 6일 확률은?[25)]

① $\dfrac{10}{3^7}$ ② $\dfrac{11}{3^7}$ ③ $\dfrac{4}{3^6}$

④ $\dfrac{13}{3^7}$ ⑤ $\dfrac{14}{3^7}$

예제 026 [2017학년도 6월]

각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 던져 밑면에 적힌 숫자를 읽기로 한다. 이 상자를 3번 던져 2가 나오는 횟수를 m, 2가 아닌 숫자가 나오는 횟수를 n이라 할 때, $i^{|m-n|}=-i$일 확률은?[26] (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[TIP16] 독립시행의 활용

알아서 잘.

예제 027 [한성은 EM9482번]

$+1$이 적힌 4개의 공과 $+2$가 적힌 3개의 공이 들어 있는 주머니에서 모든 공을 임의의 순서로 한 개씩 꺼내어 확인한 후 다시 넣지 않는다. 수직선 위의 점 P는 원점 O(0)에서 출발하여 주머니에서 뽑은 공이 $+1$이 적힌 공이면 양의 방향으로 1만큼, $+2$가 적힌 공이면 양의 방향으로 2만큼을 이동한다. 모든 시행 후에 점 P는 점 T(10)에 위치한다. 점 P가 점 A(5)를 거치지 않을 확률은?27)

① $\frac{8}{35}$ ② $\frac{9}{35}$ ③ $\frac{2}{7}$

④ $\frac{11}{35}$ ⑤ $\frac{12}{35}$

예제 028 [한성은 CD9226번]

한 개의 주사위를 던질 때마다 홀수의 눈이 나오면 1점을 얻고 짝수의 눈이 나오면 1점을 잃는 게임이 있다. 점수 2에서 시작하여 주사위를 던지는 것을 반복할 때, 점수가 0 이하 또는 4 이상이 되면 게임을 끝낸다. 주사위를 여덟 번 던져 게임이 끝날 확률은?[28)]

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{1}{32}$

④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

[TIP17] 확률변수와 확률분포

확률변수가 나타나면 일단 확률분포표를 구하자.
※ $f(x) = \mathrm{P}(X = x)$를 X의 확률질량함수라 한다.

예제 029

자연수를 값으로 취하는 확률변수 X가 모든 자연수 n에 대하여

$$\mathrm{P}(X = n+1) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(X = n)$$

을 만족할 때, $90\mathrm{P}(X \geq 3)$을 구하여라.29)

예제 030

확률변수 X는 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$의 값을 취하고, $X = k(1 \leq k \leq n)$일 확률이

$$\mathrm{P}(X = k) = ck \ (c\text{는 상수})$$

라 한다. 이때, 확률변수 X의 표준편차가 $\sqrt{6}$이 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하여라.30)

[TIP18] 확률변수의 연산

확률변수 X에 대하여 새로운 확률변수 $Y=f(X)$의 확률분포를 구할 수 있다.

예제 031

한 개의 동전을 4회 던질 때, 앞면이 나온 횟수에서 뒷면이 나온 횟수를 뺀 값을 확률변수 X라 할 때, $Y=\frac{X}{2}+3$이라고 한다. Y의 분산을 구하면?[31)]

① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

[TIP19] 평균과 분산의 연산

① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$
② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
③ $\mathrm{E}(aX^2+bX+c)=a\mathrm{E}(X^2)+b\mathrm{E}(X)+c$

예제 032

확률변수 X에 대하여 $(X+2)^2$의 평균이 13, $(X-2)^2$의 평균이 5일 때, X의 분산 $\mathrm{V}(X)$의 값은?[32)]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

[TIP20] 확률변수와 빈 칸

가끔 나오더라고.

예제 033 [2017학년도 수능 17번]

좌표평면 위의 한 점 $(x,\ y)$에서 세 점 $(x+1,\ y)$, $(x,\ y+1)$, $(x+1,\ y+1)$ 중 한 점으로 이동하는 것을 점프라 하자. 점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우 중에서, 임의로 한 경우를 선택할 때 나오는 점프의 횟수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, 각 경우가 선택되는 확률은 동일하다.)

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=\boxed{\text{(가)}}$이고, 가장 큰 값은 $k+3$이다.

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{1}{N}\times\frac{4!}{3!}=\frac{4}{N}$$

$$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{1}{N}\times\frac{5!}{2!2!}=\frac{30}{N}$$

$$\mathrm{P}(X=k+2)=\frac{1}{N}\times\boxed{\text{(나)}}$$

$$\mathrm{P}(X=k+3)=\frac{1}{N}\times\frac{7!}{3!4!}=\frac{35}{N}$$

이고 $\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=1$이므로 $N=\boxed{\text{(다)}}$이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times\mathrm{P}(X=i)\}=\frac{257}{43}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은?[33)]

① 190　② 193　③ 196
④ 199　⑤ 202

[TIP21] 이항분포

성공확률이 p인 시행을 n번 반복할 때 X번 성공한다. : $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$

① $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$이면 $\mathrm{P}(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$

② $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$이면 $\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq$

$\Rightarrow$ 같은 시행을 반복해서 성공 횟수에 관심이 있는지?

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$인 것도 필요할 수 있으니까 기억해두자.

$\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$와 같은 표현도 봐두자.

예제 034

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \dfrac{1}{4}\right)$를 따를 때, $\dfrac{\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X=k+1)}=\dfrac{21}{10}$을 만족시키는 k의 값은?[34] (단, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ 49$)

① 10　② 15　③ 20　④ 25　⑤ 30

예제 035 [2019학년도 9월 24번]

이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}\left(\frac{1}{2}X+1\right)=5$일 때, n의 값을 구하여라.[35)]

[TIP22] 정규분포의 확률밀도함수

$$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)\ :\ X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$\Rightarrow$ '확률밀도함수'의 의미, 대칭성 등을 체크해놓자.

예제 036 [2017학년도 수능]

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$의 값을 다음 정규분포표를 이용하여 구한 것은?36)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062
④ 0.078 ⑤ 0.097

예제 037 [2017학년도 9월]

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$f(12) = g(26)$, $\mathrm{P}(Y \geq 26) \geq 0.5$

일 때, $\mathrm{P}(Y \leq 20)$의 값을 다음 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[37]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.2255

[TIP23] 정규분포의 확률

표준화 : $\mathrm{P}(X \le a) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{a-m}{\sigma}\right)$

예제 038 [2015학년도 9월]

어느 학교 3학년 학생의 A과목 시험 점수는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 B과목 점수는 평균이 $m+3$, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 3학년 학생 중에서 A과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 9%이고 B 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 15%일 때, $m+\sigma$의 값은?[38) (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.04) = 0.35$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.34) = 0.41$로 계산한다.)

① 68.6 ② 70.6 ③ 72.6
④ 74.6 ⑤ 76.6

예제 039 [2014학년도 9월]

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $G(t)$는 평균이 t, 표준편차가 $\frac{1}{t^2}$인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$G(t) = \mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right)$$

이다. 함수 $G(t)$의 최댓값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[39)]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

① 0.3085 ② 0.3446 ③ 0.6915
④ 0.7257 ⑤ 0.7580

[TIP24] 이항분포의 근사

$X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$에서 n이 충분히 크면 $X \sim \mathrm{N}(np,\ npq)$로 근사시킬 수 있다.

예제 040 [2015학년도 9월]

어떤 해운회사의 통계자료에 의하면 예약고객 10명 중 8명의 비율로 승선한다고 한다. 정원이 340명인 여객선의 예약고객이 400명일 때, 승선한 고객이 예약고객만으로 정원을 초과하지 않을 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[40)]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
2.3	0.4893
2.4	0.4918
2.5	0.4938

① 0.9836 ② 0.9876 ③ 0.9893
④ 0.9918 ⑤ 0.9938

예제 041 [한성은 CZ8206번]

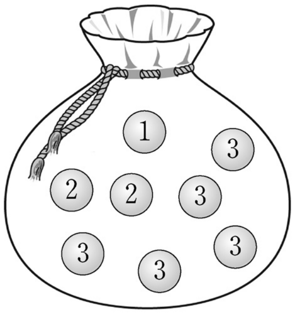
어느 공장에서 생산하는 축구공 1개의 무게는 평균이 420g이고 표준편차가 5g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 축구공 중 무게가 412g 이하이거나 428g 이상인 것은 불량품으로 분류한다. 이 공장에서 400개의 축구공을 생산했을 때, 불량품의 개수가 a개 이상일 확률은 2%이다. a의 값을 구하여라.[41] (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.6) = 0.45$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.48$로 계산한다.)

[TIP25] 표본평균의 분포

구할 수 있당.

예제 042 [2015학년도 수능]

주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 2의 숫자가 적혀 있는 공 2개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?42)



① $\dfrac{5}{32}$　② $\dfrac{11}{64}$　③ $\dfrac{3}{16}$　④ $\dfrac{13}{64}$　⑤ $\dfrac{7}{32}$

예제 043

모집단의 확률변수 X의 확률분포가 아래 표와 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출할 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$의 값은?43)

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{4}$	a	$\dfrac{1}{4}$	1

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{9}{32}$　③ $\dfrac{5}{16}$　④ $\dfrac{11}{32}$　⑤ $\dfrac{3}{8}$

[TIP26] 표본평균의 평균과 분산

모집단(모확률변수)의 평균이 $m(\mathrm{E}(X))$, 분산이 $\sigma^2(\mathrm{V}(X))$일 때,

크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 평균은 $m(\mathrm{E}(X))$, 분산은 $\dfrac{\sigma^2}{n}(\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n})$이다.

예제 044 [2017학년도 수능]

정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 1) = \mathrm{P}(\overline{Y} \leq a)$를 만족시키는 상수 a의 값은?44)

① $\dfrac{19}{8}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{21}{8}$

④ $\dfrac{11}{4}$ ⑤ $\dfrac{23}{8}$

[TIP27] 표본합의 분포

표본들의 합은 $n\times\overline{X}$이다.

$\Rightarrow$ 평균은 $n\times m$, 표준편차는 $\sqrt{n}\times\sigma$이다.

※ $n\times X$와 착각하지 않도록. 편차가 다르다.

예제 045 [한성은 OY3234번]

어느 공장에서 생산하는 남자 하나의 무게는 평균이 70kg, 표준편차가 10kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 남자를 중에서 임의로 9명을 추출하여 한 엘리베이터에 탑승시킨다. 이 엘리베이터는 탑승한 사람들의 무게의 합이 660kg 이상이면 삐- 소리가 난다고 할 때, 엘리베이터에서 삐- 소리가 날 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[45)]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228　② 0.0668　③ 0.1587
④ 0.3413　⑤ 0.5328

[TIP28] 모평균의 추정

표준편차가 σ인 모집단에서 뽑은 크기 n인 표본의 평균이 $\overline{x}$일 때,
신뢰도 $\alpha\%$로 모평균 m을 추정하면, 신뢰구간은

$$\overline{x}-z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ (\text{단, } \mathrm{P}(-z_{\alpha} \le Z \le z_{\alpha})=\alpha\%)$$

※ 수능에는 등장한 적 없지만 σ 대신 표본의 표준편차 s를 쓰는 경우가 있다.

예제 046

어느 과일 가게에서 판매하는 사과 중에서 81개를 임의추출하여 그 무게를 조사하였더니 평균이 250g, 표준편차가 36g이었다. 이 가게에서 판매하는 사과의 무게의 평균을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간은?46) (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.6)=0.4950$로 계산한다.)

① $[242.2,\ 257.8]$　② $[242,\ 258]$　③ $[240,\ 260]$
④ $[239.6,\ 260.4]$　⑤ $[237.1,\ 262.9]$

예제 047 [2012학년도 수능]

어느 회사에서 생산하는 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량은 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 음료수 16병을 임의추출하여 칼슘 함유량을 측정한 결과 표본평균이 12.34이었다. 이 회사에서 생산한 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량의 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $11.36 \le m \le a$일 때, $a+\sigma$의 값은?[47] (단, Z가 표준정규분포를 따를 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이고, 칼슘 함유량의 단위는 mg이다.)

① 14.32 ② 14.82 ③ 15.32
④ 15.82 ⑤ 16.32

[TIP29] 신뢰구간의 길이

표준편차가 σ인 모집단에서 뽑은 크기 n인 표본으로 $\alpha\%$로 모평균 m을 추정하면 신뢰구간의 길이는 $2z_{\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. (단, $\mathrm{P}(-z_{\alpha} \leq Z \leq z_{\alpha}) = \alpha\%$)

예제 048

어느 공장에서 만들어지는 물병의 용량을 조사한 결과 표준편차가 $0.2\mathrm{mL}$인 정규분포를 따른다. 이 공장에서 만들어진 물병의 평균 용량을 99%의 신뢰도로 추정할 때, 모평균과 표본평균의 차를 $0.086\mathrm{mL}$ 이하가 되도록 표본의 크기 n을 정하려고 한다. n의 최솟값을 구하여라.[48] (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.)

[TIP30] 신뢰도

$\mathrm{P}(-z_\alpha \le Z \le z_\alpha) = \alpha\%$이다. 95%, 99%만 외웠다가 털리지 말자.
※ 교과서에는 없다. 사설에서 가끔 보임.

예제 049

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 100인 표본의 표본평균 $\overline{x}$를 이용하여 신뢰도 $\alpha\%$로 모평균 m을 추정하려고 한다. Z가 표준정규분포를 따를 때, 양수 k에 대하여 $\mathrm{P}(Z \ge k) = \dfrac{1-\dfrac{\alpha}{100}}{2}$이다. 다음 중 모평균 m에 대한 신뢰구간은?[49]

① $\overline{x} - \dfrac{k}{2} \le m \le \overline{x} + \dfrac{k}{2}$

② $\overline{x} - k \le m \le \overline{x} + k$

③ $\overline{x} - \dfrac{3}{2}k \le m \le \overline{x} + \dfrac{3}{2}k$

④ $\overline{x} - 2k \le m \le \overline{x} + 2k$

⑤ $\overline{x} - \dfrac{5}{2}k \le m \le \overline{x} + \dfrac{5}{2}k$

[TIP31] 추정 두 번

요즘 문제는 두 번 시키더라고.

예제 050 [2019학년도 수능 26번]

어느 지역 주민들의 하루 여가 활동 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역 주민 중 16명을 임의추출하여 구한 하루 여가활동 시간의 표본평균이 75분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰 구간이 $a \le m \le b$이다. 이 지역 주민 중 16명을 다시 임의추출하여 구한 하루 여가 활동 시간의 표본평균이 77분일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다. $d-b=3.86$을 만족시키는 σ의 값을 구하여라.[50] (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

예제 051 [2019학년도 9월 17번]

어느 고등학교 학생들의 1개월 자율학습실 이용 시간은 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 25명을 임의추출하여 1개월 자율학습실 이용 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $80-a \le m \le 80+a$이었다. 또 이 고등학교 학생 n명을 임의추출하여 1개월 자율학습실 이용 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 다음과 같다.

$$\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a \le m \le \frac{15}{16}\overline{x_1}+\frac{5}{7}a$$

$n+\overline{x_2}$의 값은?51) (단, 이용 시간의 단위는 시간이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.)

① 121 ② 124 ③ 127
④ 130 ⑤ 133

1) 101

2) 16

3) 22

4) ③

5) ②

6) ①

7) ④

8) ④

9) ③

10) 59

11) 22

12) ④

13) 13

14) ⑤

15) 48

16) ⑤

17) 10

18) ①

19) ④

20) ④

21) ⑤

22) 150

23) ④

24) ④

25) ⑤

26) ②

27) ④

28) ⑤

29) 10

30) 10

31) ①

32) ②

33) ②

34) ③

35) 80

36) ③

37) ②

38) ⑤

39) ③

40) ⑤

41) 52

42) ⑤

43) ③

44) ③

45) ③

46) ④

47) ③

48) 36

49) ④

50) 12

51) ②