ToolBOX+
수능수학 최적화 도구상자

경우의 수

CLAVIS EDU
SOOHAN

[TIP01] 케이스 분류의 기준

알아서 잘.

예제 001

△△△국의 전화번호 중 뒤의 네 자리가

△△△－2322, △△△－0010, △△△－9090, ⋯

등과 같이 두 종류의 숫자로만 된 전화번호는 모두 몇 가지 만들 수 있는가?[1)]

① 600 ② 610 ③ 620
④ 630 ⑤ 640

예제 002

서로 다른 5개의 섬을 4개의 다리를 이용하여 모두 연결되도록 연결하는 경우의 수를 구하여라.[2)] (단, 특정한 두 섬을 연결하는 다리는 구별하지 않는다.)

[TIP02] 수형도

수형도 좋아요.

예제 003

6개의 숫자 1, 2, 3, 5, 7, 9를 이용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때 7만 중복하여 사용할 수 있다. 7을 2개 이상 포함하고, 7끼리는 이웃하지 않는 서로 다른 자연수의 개수를 구하여라.3)

예제 004

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$가 다음 조건을 만족시킨다. 가능한 f의 개수를 구하여라.4)

(가) $f(1)-1 \le f(2)$ (나) $f(2)-1 \le f(3)$

[TIP03] 포함배제의 원리

사건들의 벤다이어그램을 그려라.

예제 005

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 일대일 대응 $f:X\to X$가 세 조건

$$f(1)\neq 1,\ f(2)\neq 2,\ (f(3)-1)(f(4)-2)=0$$

을 만족시킨다. 가능한 함수 f의 개수를 구하여라.[5)]

예제 006

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X를 정의역과 공역으로 가지며 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.[6)]

(가) f는 일대일 대응이다.
(나) f는 어떤 n에 대하여 $f(n+2)-f(n)=4$를 만족한다.

[TIP04] 이웃하지 않는

두 가지 풀이가 가능하니까 둘 다 익혀놓자.
① 나머지들을 배열해 놓고 이웃하면 안 되는 것들을 사이사이에 끼워서
② 이웃하면 안 되는 것들을 배열해 놓고 나머지를 사이사이에 끼워서

예제 007 [한성은 OG7344번]

9개의 좌석이 일렬로 배치된 롤러코스터에 3명의 학생이 탑승한다. 학생이 이웃하며 앉는 경우에는 이웃하는 학생들끼리는 앞쪽에 키가 작은 사람이 오도록 키 순서대로 앉는다. 학생이 앉을 수 있는 모든 경우의 수를 구하여라.[7] (단, 3명의 학생의 키는 모두 다르다.)

예제 008

검은 돌 3개, 흰 돌 6개를 일렬로 나열할 때, 흰 돌은 적어도 2개 이상씩 서로 이웃하게 놓는 경우의 수는?[8] (단, 같은 색의 돌은 서로 구별하지 않는다.)

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

[TIP05] 순서가 정해진 순열

같은 것으로 취급해서 배열한다.

예제 009 [2014학년도 6월]

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드는 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는?[9)]

① 56 ② 60 ③ 64
④ 68 ⑤ 72

예제 010 [한성은 SP0409번]

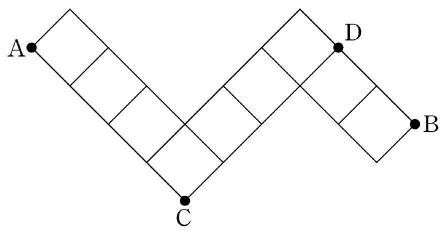
크기가 모두 다른 10개의 귤 중 6개를 선택하여 대/중/소라 적힌 세 상자에 각각 2개씩 넣는 경우의 수를 구하여라.[10)] (단, '대' 상자에 들어가는 귤들은 '중' 상자에 들어가는 귤들보다 크고, '중' 상자에 들어가는 귤들은 '소' 상자에 들어가는 귤들보다 크다.)

[TIP06] 경로의 수

숫자 더해서 풀자.

예제 011 [2013학년도 수능]

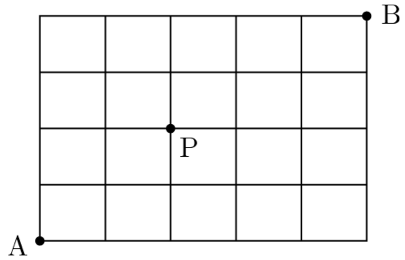
그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고, D지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?[11)]



① 26 ② 24 ③ 22
④ 20 ⑤ 18

예제 012

그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 P지점을 통과할 때는 진행을 바꾸지 않고 직진으로만 지나갈 수 있다고 할 때, A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하여라.[12)]

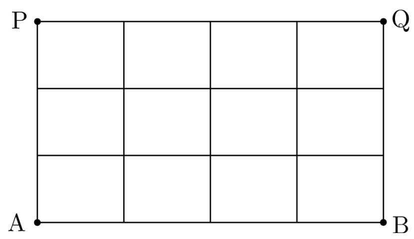


[TIP07] 경로의 수2

어디 가서 배워 와라.

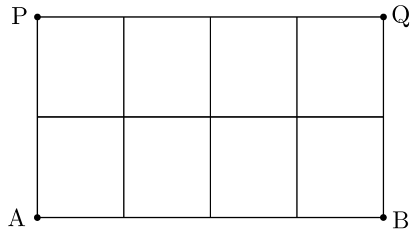
예제 013 [한성은 CS5559번]

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A지점에서 B지점으로 이동한다. 지나간 길은 다시 지나지 않으며 왼쪽 방향으로는 이동하지 않는다. 선분 PQ와 만나는 경로의 수를 구하여라.13)



예제 014 [한성은 XD9589번]

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 선분 PQ의 일부를 거쳐 B지점으로 이동한다. 지나간 길은 다시 지나지 않으며 최단거리로 가는 경우의 수는?14)



① 24 ② 28 ③ 32 ④ 35 ⑤ 40

[TIP08] 원순열

직순열 걸고 같은 배열의 수로 나누거나 하나를 미리 고정시켜놓고 풀 수 있다.
조건이 걸린 경우는 하나를 미리 고정시켜놓고 시작하는 풀이가 유용하다.

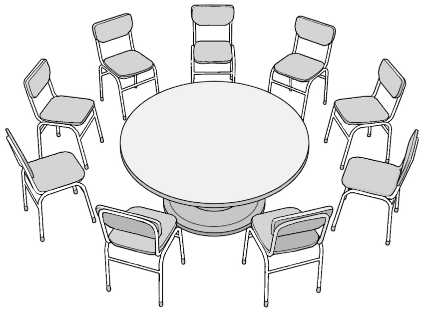
예제 015

남자 4명과 여자 4명이 다음 조건에 따라 원탁에 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.[15]

(가) 여자 4명은 이웃하여 앉는다.
(나) 특정한 남자 2명은 이웃하여 앉지 않는다.

예제 016

여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n\times 6!$일 때, 자연수 n의 값은?[16) (단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.)



① 10　② 12　③ 14　④ 16　⑤ 18

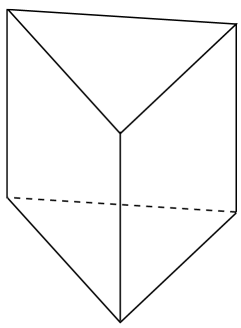
[TIP09] 입체도형을 색칠하는 방법의 수

목걸이 순열이니까 아마 수능에는 나올 수 없을 거야.

예제 017

오른쪽 그림과 같은 정삼각기둥의 다섯 개의 면을 서로 다른 7가지의 색을 사용하여 칠하는 방법의 수는?[17] (단, 다섯 개의 면에는 모두 서로 다른 색을 칠한다.)

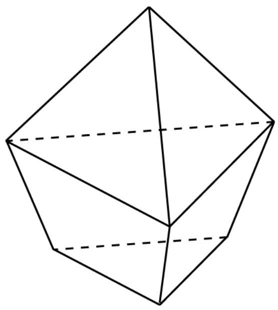
① 210 ② 420 ③ 840
④ 620 ⑤ 1260



예제 018

오른쪽과 같이 합동인 정삼각형 3개와 합동인 등변사다리꼴 3개, 1개의 정삼각형으로 이루어진 칠면체가 있다. 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수는?[18]

① 420 ② 560 ③ 840
④ 1260 ⑤ 1680



[TIP10] 뽑아서 배열하기

전체 중의 일부분만 뽑아서 줄 세우는 경우의 수를 구할 때는,
줄 세울 것들을 뽑는 과정과 배열하는 과정을 나눠서 생각하자.

예제 019

8개의 문자, A, A, A, B, B, B, C, C 중 5개의 문자를 뽑아 나열할 때, A, B, C가 적어도 하나씩은 포함되도록 나열하는 방법의 수는?[19)]

① 110　　② 120　　③ 130
④ 140　　⑤ 150

[TIP11] 집합과 경우의 수

벤다이어그램을 미리 그려 놓고 원소들을 채워 넣는 경우의 수를 고민한다.

예제 020

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 A, B가

$n(A\cap B)=2$

를 만족시키는 경우의 수를 구하여라.[20)]

예제 021

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 두 부분집합 A, B가

$A\subset B$

를 만족시키는 경우의 수를 구하여라.[21)]

[TIP12] 부정방정식과 중복조합1

수능에 계속 나오고 있으므로 개 중요하다.
[같은 공을 다른 상자에 넣는 문제]는 부정방정식으로 돌릴 수 있다.

예제 022 [2017학년도 6월]

사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하여라.[22] (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.)

예제 023 [2020학년도 9월 28번]

연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.[23] (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고,
> 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.
> (나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고,
> 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.
> (다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고,
> 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

[TIP13] 부정방정식과 중복조합2

수능에 계속 나오고 있으므로 개 중요하다.
조건이 걸려 있는 경우까지 잘 다룰 수 있도록 연습해놓자.

예제 024 [2017학년도 수능]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의
모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하여라.24)

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a \times 4^b$은 8의 배수이다.

예제 025 [2020학년도 수능 16번]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?[25)]

(가) $a+b+c-d=9$
(나) $d \leq 4$이고 $c \geq d$이다.

① 265 ② 270 ③ 275
④ 280 ⑤ 285

[TIP14] 함수와 중복조합

가끔 나온당.

① $1 \le a \le b \le c \le 10$인 정수 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_{10}\mathrm{H}_3$이다.

② $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$를 만족하는 함수의 개수는 ${}_{n(\text{공역})}\mathrm{H}_{n(\text{정의역})}$이다.

예제 026 [2016학년도 수능]

세 정수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$$1 \le |a| \le |b| \le |c| \le 5$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?[26)]

① 360 ② 320 ③ 280
④ 240 ⑤ 200

예제 027

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여
함수 $f:A \to B$ 중 다음 조건을 만족시키는 것의 개수는?[27)]

(가) 임의의 $x_1,\ x_2 \in A$에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 64 ② 82 ③ 100
④ 120 ⑤ 128

[TIP15] 함수와 중복조합2

조건을 처리해보자.

예제 028 [2020학년도 6월 19번]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)의 개수는?[28)]

(가) $n=1$, 2, 3일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$이다.
(나) $x_4 \leq 12$

① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

예제 029 [한성은 UG8488번]

다음 조건을 만족시키는 정수 a, b, c, d, e의
모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하여라.[29)]

(가) $1 \le a \le b \le c \le d \le e \le 8$
(나) $a+4 \le d$

[TIP16] 분할과 분배

서로 다른 n개를 p개, q개, r개 $(p+q+r=n)$의 세 묶음으로 나누는 경우의 수

① p, q, r이 모두 다를 때 : ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r$

② p, q, r 중 어느 두 개가 같을 때 : ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \times \dfrac{1}{2!}$

③ p, q, r이 모두 같을 때 : ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \times \dfrac{1}{3!}$

※ 분배하는 방법의 수 : (분할하는 방법의 수)$\times r!$

※ 받는 사람마다 개수가 정해진 분배 : 순서대로 개수만큼 뽑아가면 됨.

예제 030

A와 B를 포함한 9명을 3명씩 세 개의 조로 나눌 때, A와 B가 같은 조가 되는 경우의 수 a와 A와 B가 서로 다른 조가 되는 경우의 수 b에 대하여 $b-a$의 값을 구하여라.30)

예제 031 [한성은 OR4468번]

A, B, C, D, E 다섯 사람을 세 교실 101호, 102호, 103호에 넣으려고 할 때, 101호와 102호에는 각각 적어도 한 명이 들어가도록 하는 경우의 수를 구하여라.31)

[TIP17] 나눠 넣기1

① 넣는 공이 서로 같은 것인지, 다른 것인지
② 넣어야 하는 상자가 서로 같은 것인지 다른 것인지
③ 빈 상자가 있어도 되는지, 안 되는지
의 여부와 문제들마다의 조건에 따라서 다 다른 문제가 되므로 개빡친다.

예제 032 [2017학년도 9월]

서로 다른 과일 5개를 3그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는?[32)](단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.)

① 60　② 65　③ 70
④ 75　⑤ 80

예제 033

서로 모양과 크기가 같은 초콜릿 10개를 서로 다른 세 개의 접시 A, B, C에 나누어 담으려 한다. 이때, 각 접시에는 초콜릿을 적어도 하나씩 담도록 하는 방법의 수를 구하여라.[33)]

[TIP18] 나눠 넣기2

빡친다고.

예제 034 [한성은 CR0924번]

A와 B를 포함한 6명의 학생을 서로 다른 세 개의 상자에 넣으려 한다.
다음 조건을 만족하는 경우의 수를 구하여라.[34)]

(가) A와 B는 같은 상자에 넣는다.
(나) 빈 상자가 없도록 넣는다.

예제 035 [2019학년도 9월(나형)]

서로 다른 종류의 사탕 3개와 같은 종류의 구슬 7개를 같은 종류의 주머니 3개에 남김없이 나누어 넣으려고 한다. 각 주머니에 사탕과 구슬이 각각 1개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수는?[35)]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

[TIP19] 치역과 공역이 같은 함수의 개수

자주 보게 되니까 따로 한 번 정리해두자.
① 정의역을 분할해서 분배
② 전체에서 여사건을 빼서
③ '치역에 하나가 없는 함수'들의 포함배제를 통해
※ 어느 풀이든 공역이 4개 이상이 되면 돌아버린다.

예제 036

정의역이 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이고 공역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 함수 중 치역과 공역이 같은 함수의 개수를 구하여라.[36)]

예제 037

승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라.[37)] (단, 새로 타는 승객은 없다.)

[TIP20] 이항정리

$(a+b)^n$의 전개식에서 $a^k b^{n-k}$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_k$이다.

예제 038 [2019학년도 9월 8번]

다항식 $(x+2)^{19}$의 전개식에서 x^k의 계수가 x^{k+1}의 계수보다 크게 되는 자연수 k의 최솟값은?38)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

예제 039 [2019학년도 6월(나형) 14번]

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3의 계수가 7일 때, 상수 a의 값은?39)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[TIP21] 이항계수의 성질

예의상. 중요한 것만.

① ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$

② ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+{}_{n}\mathrm{C}_{6}+\cdots=2^{n-1}$

③ ${}_{k}\mathrm{C}_{k}+{}_{k+1}\mathrm{C}_{k}+{}_{k+2}\mathrm{C}_{k}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{k}={}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$

예제 040

${}_{10}\mathrm{C}_{0}+{}_{10}\mathrm{C}_{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{4}+{}_{10}\mathrm{C}_{6}+{}_{10}\mathrm{C}_{8}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$의 값은?40)

① 64 ② 128 ③ 256
④ 512 ⑤ 1024

예제 041

$(1+x)+(1+x)^{2}+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^{2}의 계수는?41)

① 85 ② 105 ③ 125
④ 145 ⑤ 165

[TIP22] 이항정리와 빈 칸

사실 나올 것 같지는 않아.

예제 042 [2017학년도 9월]

다음은 x에 대한 다항식 $(x+a^2)^n$과 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같게 되는 두 자연수 a와 $n(n \ge 4)$의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 a^2n이다.
> $(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서
> $x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{\text{(가)}} \times a^3$이고,
> $2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.
> 따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는
> $$\boxed{\text{(가)}} \times a^3 - 2a^2n$$
> 이다. 그러므로
> $$a^2n = \boxed{\text{(가)}}\, a^3 - 2a^2n$$
> 이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면
> $$a = \frac{18}{\boxed{\text{(나)}}}$$
> 이다. 여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로
> $$n = \boxed{\text{(다)}}$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 k라 할 때, $f(k)+g(k)$의 값은?42)

① 10 ② 16 ③ 22 ④ 28 ⑤ 34

[TIP23] 이항계수의 성질과 빈 칸

성질 정리 좀 해둬.

예제 043 [2017학년도 9월]

1부터 $n(n \geq 4)$까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 자연수 $k(4 \leq k \leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로
>
> $$\mathrm{P}(X=k) = \frac{\boxed{\text{(가)}}}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}}$$
>
> 이다. 자연수 $r(1 \leq r \leq k)$에 대하여
>
> $${}_{k}\mathrm{C}_{r} = \frac{k}{r} \times {}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$$
>
> 이므로
>
> $$k \times \boxed{\text{(가)}} = 4 \times \boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=4}^{n} \{k \times \mathrm{P}(X=k)\} \\ &= \frac{1}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}} \sum_{k=4}^{n} \left(k \times \boxed{\text{(가)}}\right) \\ &= \frac{4}{{}_{n}\mathrm{C}_{4}} \sum_{k=4}^{n} \boxed{\text{(나)}}\end{aligned}$$
>
> 이다.
>
> $$\sum_{k=4}^{n} \boxed{\text{(나)}} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{5}$$
>
> 이므로
>
> $$\mathrm{E}(X) = (n+1) \times \boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식를 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a \times f(6) \times g(5)$의 값은?[43]

① 40　② 45　③ 50

④ 55　⑤ 60

[TIP24] 문제풀이와 빈 칸

주로 확률로 나오지만.

예제 044 [2018학년도 9월]

다음은 n명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, n은 6의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는 '(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서 '(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와 '(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :
n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)}$이다.

(ii)의 경우 :
각 상자에 $\frac{2n}{3}$개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1이다.

(iii)의 경우 :
두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개 보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times (\boxed{(나)} - 1)$이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)} + h(30)$의 값은?[44)]

① 481 ② 491 ③ 501
④ 511 ⑤ 521

[TIP25] 함수의 개수와 빈 칸

거지같은 문제.

예제 045 [2019학년도 수능 17번]

다음은 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$과 함수 $f:X\to X$에 대하여 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자. $n(A)=6$이면 함수 f는 일대일 대응이고, 함수 $f\circ f$도 일대일 대응이므로 $n(B)=6$이다. 또한 $n(A)\leq 4$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\leq 4$이다.
그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.

(ⅰ) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자. $n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

(ⅲ) (ⅰ)에서 선택한 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$와 (ⅱ)에서 선택한 $f(k)$에 대하여, $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로
$$A=\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)\} \cdots (*)$$
이다. $(*)$을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일 대응의 개수와 같으므로 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}\times\boxed{\text{(나)}}\times\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?[45)]

① 131 ② 136 ③ 141
④ 146 ⑤ 151

1) ④

2) 125

3) 380

4) 40

5) 30

6) 176

7) 343

8) ②

9) ②

10) 210

11) ②

12) 96

13) 175

14) ④

15) 288

16) ②

17) ②

18) ⑤

19) ③

20) 270

21) 243

22) 36

23) 49

24) 32

25) ③

26) ③

27) ④

28) ①

29) 396

30) 140

31) 180

32) ⑤

33) 36

34) 150

35) ⑤

36) 150

37) 186

38) ③

39) ②

40) ④

41) ⑤

42) ①

43) ①

44) ①

45) ①