[T]

ToolBOX+

수능수학 최적화 도구상자

공간도형과 공간좌표

5A ACADEMY

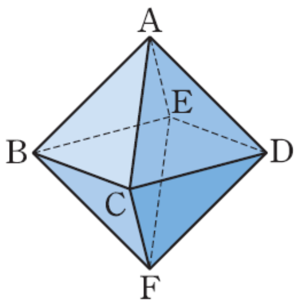
SOOHAN

[TIP01] 공간도형의 위치관계

서로 다른 두 직선이 서로 꼬인 위치에 있다.
$\Rightarrow$ 한 평면 위에 있지 않다.
$\Rightarrow$ 만나지 않고, 평행하지 않다.

예제 001

그림과 같은 정팔면체에서 12개 모서리 중 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 것의 개수는?[1)]



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

예제 002 [2018학년도 수능 20번]

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

(가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
(나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[2)]

ㄱ. 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
ㄷ. 세 점이 $\mathrm{A}(2, 3, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1, 0)$, $\mathrm{C}(2, -1, 0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP02] 두 직선이 이루는 각

적당히 평행이동 시켜서 만나게 한 후 잰다.

예제 003

직육면체 $\mathrm{ABCD}-\mathrm{EFGH}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 CE와 FH는 서로 수직이다.
(나) 선분 CE와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

선분 CE와 선분 AF가 이루는 각의 크기를 α라 할 때, $\cos^2\alpha$의 값은?3)

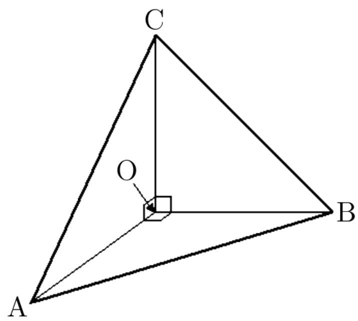
① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{3}{10}$
④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[TIP03] 직선과 평면의 수직성

평면이 품는 서로 다른 두 직선과 수직이면 평면과 수직이다.

예제 004

그림과 같이 $\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COA} = \frac{\pi}{2}$인 사면체 OABC가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M, 점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4)]



ㄱ. 직선 OM과 AB는 서로 수직이다.
ㄴ. 직선 OH과 AB는 서로 수직이다.
ㄷ. 점 H는 직선 CM 위의 점이다.

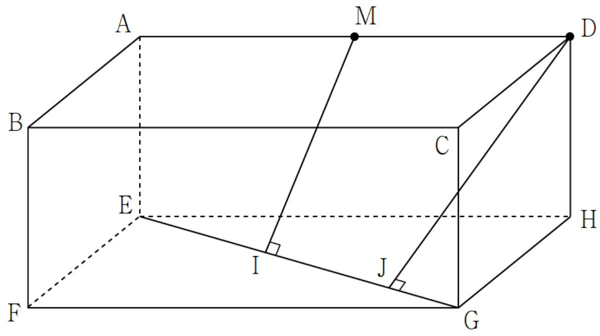
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP04] 삼수선의 정리

공간의 한 점에서 한 직선에 수선의 발을 내릴 때,
직선을 품는 평면에 내린 수선의 발을 경유하면 꿀이다.

예제 005

$\overline{AB}=\sqrt{5}$, $\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{AE}=2$인 직육면체 ABCD−EFGH에서 선분 AD의 중점을 M이라 하고, 두 점 M, D에서 선분 EG에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자. $\overline{MI}\times\overline{DJ}$의 값은?[5)]



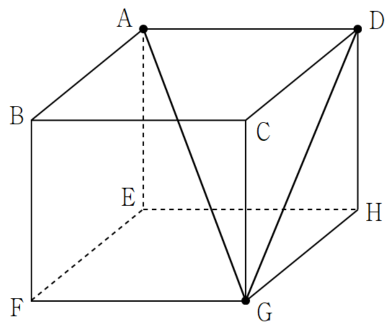
① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $2\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{11}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[TIP05] 직선과 평면이 이루는 각

정의대로 구하도록.

예제 006

직육면체 ABCD$-$EFGH에서 직선 AG와 직선 DG가 평면 EFGH와 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 할 때, $\tan\alpha = \frac{3}{5}$, $\tan\beta = 1$이다. 직선 AG가 평면 ABFE와 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?6)



① $\frac{\sqrt{5}}{3}$　② $\frac{\sqrt{6}}{3}$　③ $\frac{\sqrt{7}}{3}$

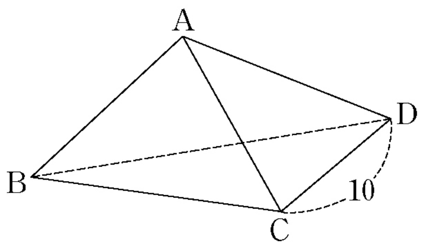
④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　⑤ 1

[TIP05] 이면각의 크기

① 교선 찾고 정의대로
② 교선 찾고 삼수선 때려서

예제 007 [2010학년도 9월 5번]

사면체 ABCD에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 30°이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는?[7)]



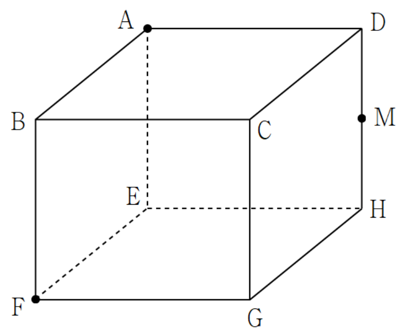
① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ 5
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[TIP06] 교선의 작도

① 평행한 면을 자를 때
② 평면을 연장하는 방법

예제 008

$\overline{AB} = \sqrt{5}$, $\overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AE} = 2$인 직육면체 ABCD$-$EFGH에서 선분 DH의 중점을 M이라 하자. 평면 AFM과 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?8)



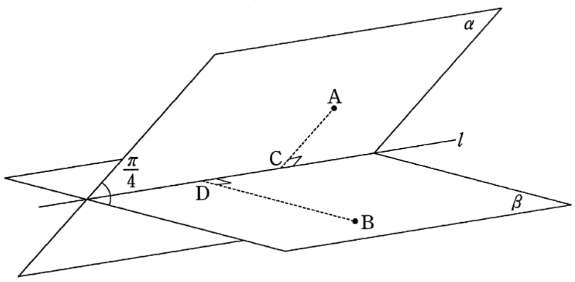
① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[TIP07] 기준 평면과 수선의 발

바닥과 높이.

예제 009 [2017학년도 9월 29번]

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하여라.[9]
(단, a, b는 유리수이다.)

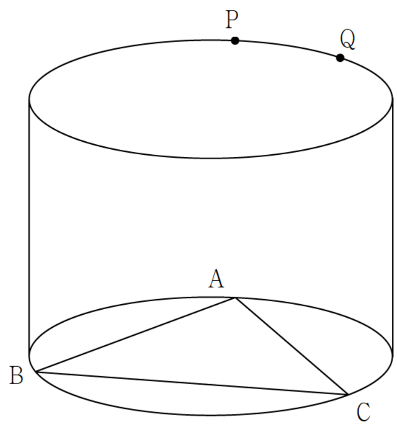


예제 010

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 2인 원기둥의 한 밑면의 둘레 위의 세 점 A, B, C와 다른 밑면의 둘레 위의 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{PQ}=2$
> (나) 삼각형 ABC는 정삼각형이다.
> (나) 선분 PA는 원기둥의 한 밑면과 수직이다.

삼각형 BCQ의 넓이가 $2\sqrt{15}$일 때, 원기둥의 높이는?10)



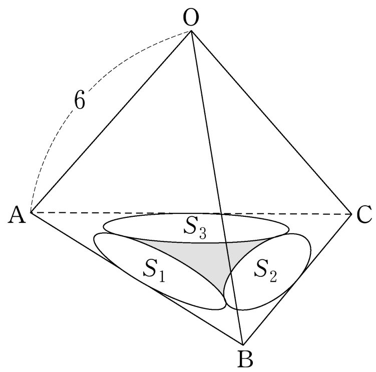
① $\sqrt{10}$　② $2\sqrt{3}$　③ $\sqrt{14}$　④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

[TIP08] 정사영의 넓이

$\cos\theta$배가 된다.

예제 011 [2008학년도 수능 24번]

한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 $\triangle$OAB, $\triangle$OBC, $\triangle$OCA에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하여라.[11)]

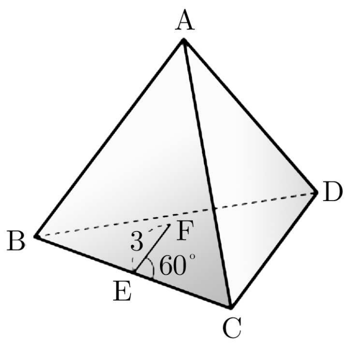


[TIP09] 이면각과 선분

보조선 기억.

예제 012

그림과 같이 정사면체 ABCD의 한 면 ABC 위에 길이가 3인 선분 EF가 있다. 직선 EF와 직선 BC가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 선분 EF의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는?12)



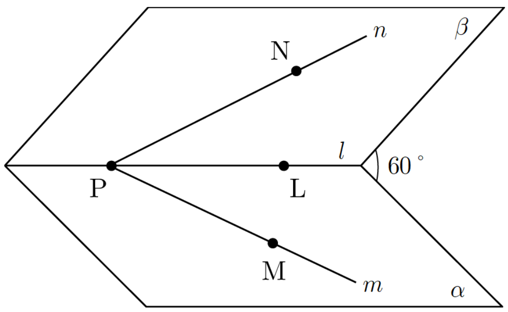
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

[TIP10] 삼면각

상황 연습만 해두자.

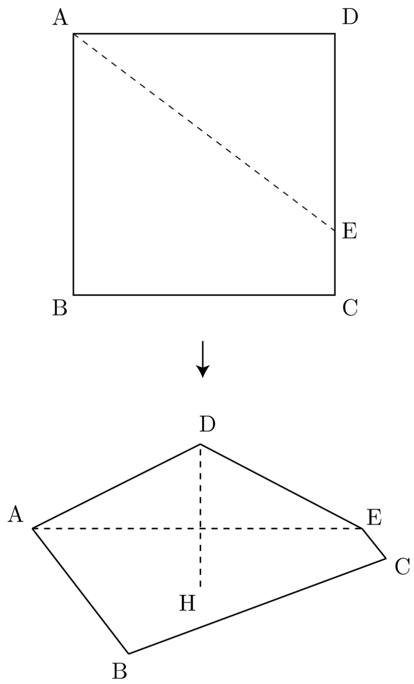
예제 013

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 60°인 두 평면 α, β가 있고, 평면 α 위의 직선 m과 평면 β 위의 직선 n은 점 P에서 서로 만난다. 세 점 L, M, N이 각각 직선 l, m, n 위의 점이고 $\cos(\angle \mathrm{LPN})=\frac{4}{5}$, $\cos(\angle \mathrm{LPM})=\frac{\sqrt{2}}{2}$이다. $\angle \mathrm{NPM}=\theta$일 때 $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[13] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



예제 014

그림과 같이 정사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 점 E는 변 CD를 1:3으로 내분하는 점이다. 선분 AE를 접는 선으로 하여, 두 평면 ABCE와 ADE가 이루는 각의 크기가 60°가 되도록 접었다. 이때 $\cos(\angle DAB)$의 값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[14] (단, 점 D의 평면 ABCE 위로의 정사영 H는 사각형 ABCE 내부의 점이며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[TIP11] 정사면체

3 : 1 외워라.

예제 015

중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 ABCD가 있다. 평면 OAB와 선분 CD가 만나는 점을 E라 할 때, 삼각형 ABE의 넓이는?[15)]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

[TIP12] 구의 위치관계

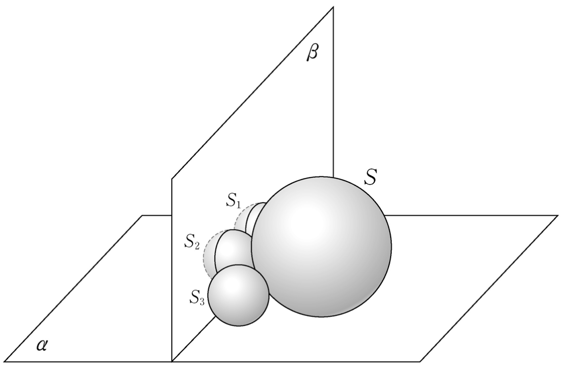
중심에서 연결.

예제 016 [2015학년도 9월 29번]

그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
(나) S_1, S_2, S_3는 모두 S에 접한다.
(다) S_1은 S_2와 접하고, S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3를 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.16) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

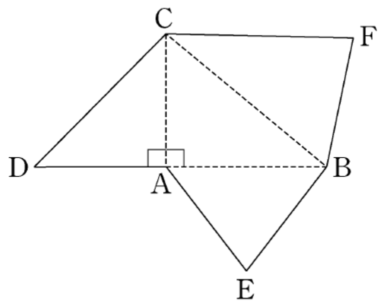


[TIP13] 종이접기

접는 선에 수직인 평면 따라.

예제 017 [2012학년도 9월 15번]

그림은 $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$이고 $\angle DAC=\angle CAB=90^{\circ}$인 사면체의 전개도이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?17)



ㄱ. $\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{BP}$
ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP14] 공간에 놓인 삼각형

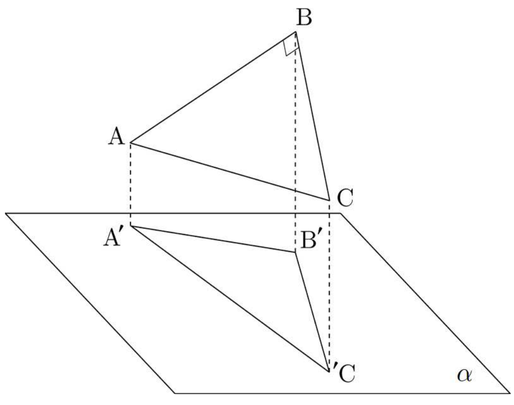
적당히.

예제 018 [한성은 FY5033번]

좌표공간에 평면 α와

$$\overline{\mathrm{AB}}=8,\quad \overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{3},\quad \angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α와 삼각형 ABC가 존재하는 평면이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다. 세 점 A, B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A$'$, B$'$, C$'$이라 하자. $\overline{\mathrm{A'B'}}=2\sqrt{7}$일 때, $\overline{\mathrm{B'C'}}=l$이다. l^2의 값을 구하여라.18)



[TIP15] 꼬인 위치에 있는 두 직선

두 직선과 모두 수직인 선분을 잡아본다.

예제 019 [한성은 VU3588번]

좌표공간의 두 직선 l과 m에 대하여 직선 l 위의 두 점 A, B에서 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. l, m, A, B, C, D는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 l과 m이 이루는 각은 $60°$이다.
(나) $\overline{AB}=\overline{AC}=4$
(다) $l \perp AC$

$\overline{BD}^2$의 값은?[19)]

① 24　② 26　③ 28
④ 30　⑤ 32

[TIP16] 단면화(대충)

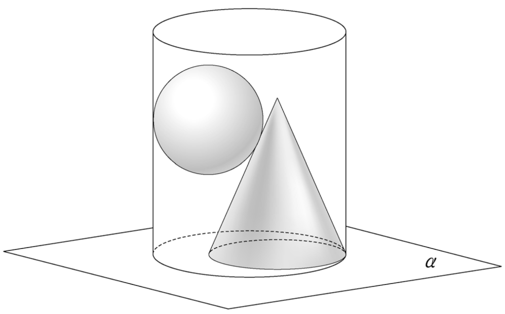
알아서.

예제 020 [2012학년도 수능 29번]

그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A$'$, B$'$일 때, $\angle \mathrm{A'OB'} = 180°$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다. $100p$의 값을 구하여라.[20] (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A$'$은 일치한다.)



[TIP17] 단면화(교선에 수직인 방향)

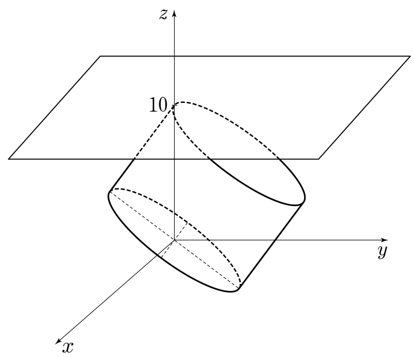
교선을 점으로 보는 쪽에서 보면 좋다.

예제 021 [2013학년도 9월 14번]

좌표공간에 있는 원기둥이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 높이는 8이다.
(나) 한 밑면의 중심은 원점이고 다른 밑면은 평면 $z=10$과 오직 한 점 $(0,\ 0,\ 10)$에서 만난다.

이 원기둥의 한 밑면의 평면 $z=10$ 위로의 정사영의 넓이는?[21)]



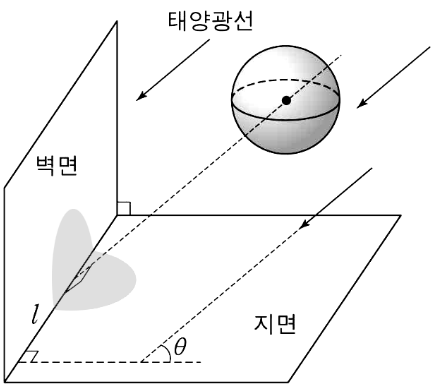
① $\dfrac{139}{5}\pi$ ② $\dfrac{144}{5}\pi$ ③ $\dfrac{149}{5}\pi$
④ $\dfrac{154}{5}\pi$ ⑤ $\dfrac{159}{5}\pi$

[TIP18] 그림자

① 태양광선에 수직인 평면을 생각한다.
(태양이 봤을 때 보이는 도형을 생각한다.)
② 적당한 길이배를 때린다.

예제 022 [2010학년도 9월 15번]

그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[22]



ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다.
ㄴ. $\theta = 60^\circ$ 이면 $a < b$이다.
ㄷ. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP19] 좌표공간

알아서.

예제 023 [2016학년도 9월 4번]

좌표공간의 점 $\mathrm{P}(2,\ 2,\ 3)$을 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자.
두 점 P와 Q 사이의 거리는?[23)]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

예제 024 [2019학년도 수능 3번]

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ a,\ -2)$, $\mathrm{B}(5,\ -2,\ 1)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a의 값은?[24)]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[TIP20] 구의 방정식

알아서.

예제 025 [2014학년도 수능 19번]

좌표공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축과 각각 접하고 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는?25)

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

예제 026 [2006학년도 수능 10번]

좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서 구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$가 지나는 부분의 개수는?26)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[TIP21] 구의 위치관계

알아서.

예제 027 [2009학년도 9월 9번]

다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?27)

좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가
두 개의 구

$x^2+y^2+z^2=1$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$

에 동시에 외접한다.

① $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\pi$ ② $\sqrt{5}\,\pi$ ③ $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}\pi$

④ $2\sqrt{5}\,\pi$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

예제 028 [2013학년도 9월 27번]

좌표공간에서 구

$$S:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$이다. $a+b$의 값을 구하여라.[28)]
(단, a, b는 자연수이다.)

[TIP22] 내분점과 직선

알아서 잘.

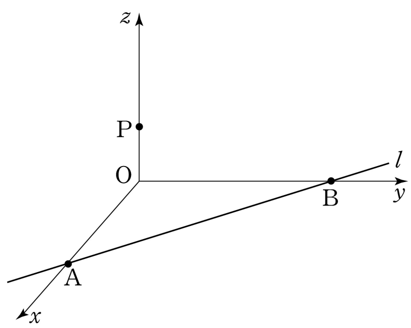
예제 029

좌표공간의 두 점 $A(1,\ 2,\ a)$와 $B(-1,\ 6,\ -2)$에 대하여 선분 AB가 y축과 만날 때, 직선 AB가 xz평면과 만나는 점은 $C(b,\ 0,\ c)$이다. $a+b+c$의 값을 구하여라.29)

예제 030 [2006학년도 9월 8번]

좌표공간에서 두 점 $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ \sqrt{3},\ 0)$을 지나는 직선 l이 있다. 점 $P\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$로부터 직선 l에 이르는 거리는?30)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$



예제 031 [2008학년도 수능 23번]

좌표공간에 네 점 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(-3,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{D}(0,\ 0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 있다. 모서리 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라고 할 때, $a+b+c=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[31] (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[TIP23] 단면화(2)

적당히.

예제 032 [2018학년도 9월 17번]

좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$과 xy평면 위의 원 $C: x^2+y^2=4$가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R을 포함하는 평면이 xy평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이다. 점 P의 z좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는?[32)]

① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$
④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

예제 033 [2014학년도 9월 19번]

좌표공간에서 y축을 포함하는 평면 α에 대하여 xy평면 위의 원 $C_1 : (x-10)^2+y^2=3$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 yz평면 위의 원 $C_2 : y^2+(z-10)^2=1$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S로 같을 때, S의 값은?[33)]

① $\dfrac{\sqrt{10}}{6}\pi$　② $\dfrac{\sqrt{10}}{5}\pi$　③ $\dfrac{7\sqrt{10}}{30}\pi$

④ $\dfrac{4\sqrt{10}}{15}\pi$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

1) ②

2) ⑤

3) ③

4) ⑤

5) ③

6) ④

7) ②

8) ⑤

9) 12

10) ④

11) 27

12) ②

13) 321

$$\cos\theta = \frac{11\sqrt{2}}{20}$$

14) 43

$$\cos(\angle \mathrm{DAB}) = \frac{18}{25}$$

15) ②

16) 11

17) ⑤

18) 39

19) ③

20) 32

21) ②

22) ③

23) ④

24) ④

25) ②

26) ③

27) ⑤

28) 13

29) 8

30) ①

31) 11

32) ④

33) ⑤