[T]

ToolBOX+

수능수학 최적화 도구상자

극한

CLAVIS EDU

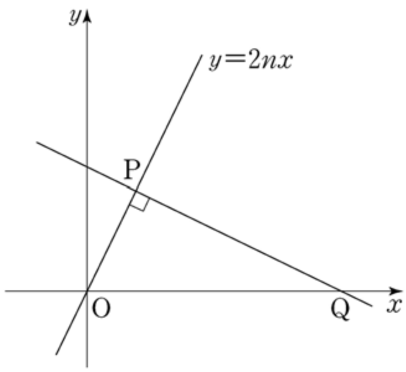
SOOHAN

[TIP01] 부정형의 극한

$\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한 : 분모분자를 최고차항으로 나눈다.

예제 001 [2016학년도 6월(가형) 10번]

자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값은?[1)]
(단, O는 원점이다.)



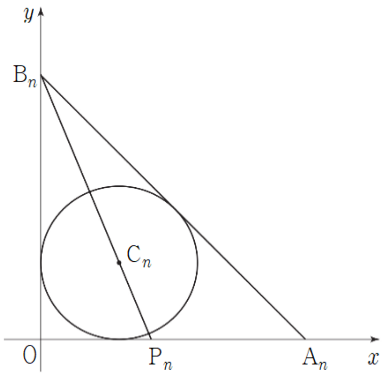
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[TIP02] 대충 살기

대충 풀어도 되는 각이 보이면 해. (책임지지 않음.)

예제 002

자연수 n에 대하여 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}_n(n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(0,\ n+1)$이 있다. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 두 점 B_n과 C_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 P_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}$의 값은?[2)] (단, O는 원점이다.)



① $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　② $\sqrt{2}-1$　③ $2-\sqrt{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $2\sqrt{2}-2$

[TIP03] 합과 극한

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \sim \frac{n^4}{4}$

예제 003

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2+\cdots+(4n)^2}$ 의 값은?3)

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

예제 004

자연수 n에 대하여 $f(n) = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$ 일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$ 의 값은?4)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$

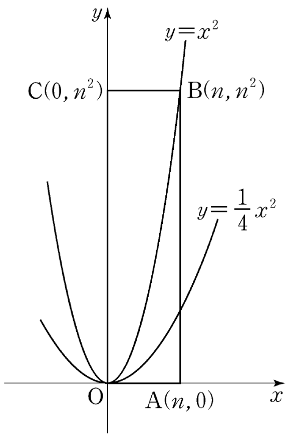
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

[TIP04] 대충 넓이

각 나오죠.

예제 005

그림은 두 곡선 $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$과 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(n,\ 0)$, $\mathrm{B}(n,\ n^2)$, $\mathrm{C}(0,\ n^2)$인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. 자연수 n에 대하여, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 직사각형 OABC 또는 그 내부에 있고 부등식 $\frac{1}{4}x^2 \le y \le x^2$을 만족시키는 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은?5)



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$

④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

[TIP05] 무한대 빼기 무한대 꼴

$\infty - \infty$ 꼴의 부정형 : 대충 유리화

※ $\sqrt{n^2+2an+b} \sim (n+a)$

예제 006

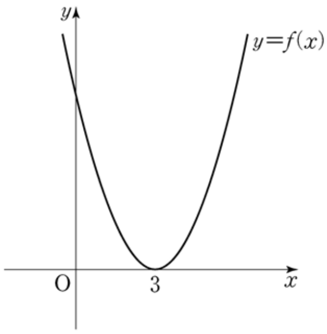
모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}\right)=5$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$의 값을 구하여라.6)

예제 007 [2016학년도 6월(나형) 14번]

함수 $f(x)$가

$$f(x)=(x-3)^2$$

이다. 자연수 n에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 α, β일 때 $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$의 값은?[7)]



① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$

④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

[TIP06] 무한대 빼기 무한대 꼴2

$\infty - \infty$ 꼴은 차수, 최고차항의 계수가 맞을 때만 유리화한다.

예제 008 [2016학년도 9월(나형) 28번]

양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하여라.[8)]

예제 009

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
(나) $\lim\limits_{n\to\infty} (2a_n - 5b_n) = 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[9] (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[TIP07] 수렴성의 연산1

0으로 나누는 것만 아니면 수렴할 때는 대충 계산된다.

예제 010

수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = 2, \quad \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n = 7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.[10] (단, $a_n \neq 0$)

예제 011

수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}+20}{a_{n+1}-14} = 2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.[11]

[TIP08] 수렴성의 연산2

가진 모양과 구하려는 모양을 잘 맞춰본다.

예제 012

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=3,\quad \lim_{n\to\infty}(n^2+3n+2)b_n=2$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n$의 값을 구하여라.12)

예제 013 [한성은 QR0730번]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2+1}=2$일 때 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2a_{2n}}{(a_{n+1})^2}$의 값은?13)

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ 2

④ 4　　⑤ 8

[TIP09] 극한과 대소

모든 n에 대하여 $a_n < b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$

예제 014

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$의 값은?14)

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

[TIP10] 등비수열의 수렴

등비수열 $\{r^n\}$은 $-1 < r \le 1$이면 수렴한다.

예제 015

수열 $\left\{\left(\dfrac{2x-1}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합은?15)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[TIP11] 등비수열을 포함한 부정형

분모에서 밑이 가장 큰 항으로 분모, 분자를 나눈다.

예제 016 [2019년 3월(나형) 13번]

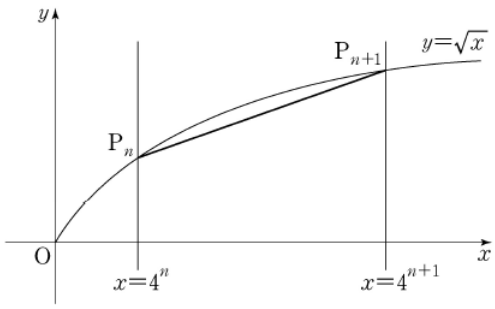
$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n+1}+2}{\left(\dfrac{m}{5}\right)^{n}+1}=2$가 되도록 하는 자연수 m의 개수는?16)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

예제 017 [2017학년도 수능(나형) 28번]

자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자.

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하여라.17)



[TIP12] 등비수열과 함수

범위 나눈다.

예제 018

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}+ax}{2x^n+1}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[18] (단, n은 자연수이다.)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1

④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

예제 019

두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{(2x)^{2n}+1}$, $g(x)=x^2+ax+b$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$의 값은?[19] (단, a, b는 상수이다.)

① 0　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{4}$　⑤ 1

[TIP13] 수열극한의 진위판정

진위판정은 해줘야 예의.

예제 020

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?20)

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이면 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$이 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP14] 점화식과 극한

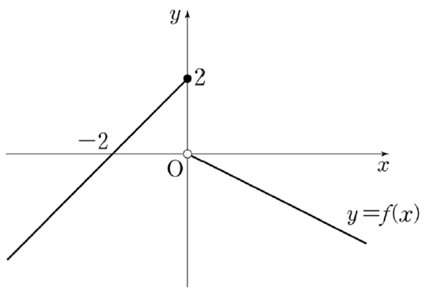
$a_{n+1}=f(a_n)$일 때, $y=f(x)$의 그래프와 거미줄 그림.

예제 021 [2014학년도 6월(나형) 14번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x>0) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.



수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, $a_{n+1}=f(f(a_n))(n \ge 1)$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[21)]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[TIP15] 급수의 합

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} = \lim_{n\to\infty} S_n$: ① 부분합을 구하고, ② 극한을 취한다.

예제 022

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ 의 합은?[22)]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

예제 023

첫째항이 2이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{1}{10}$ 이다. d의 값을 구하여라.[23)]

[TIP16] 급수의 수렴과 수열의 수렴성

① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$

② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

예제 024 [2015학년도 수능(나형) 11번]

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 3$, $a_2 = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은?24)

① $\frac{81}{8}$　② $\frac{83}{8}$　③ $\frac{85}{8}$

④ $\frac{87}{8}$　⑤ $\frac{89}{8}$

예제 025 [2013학년도 수능(나형) 19번]

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n \cdot a_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right) = 3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{\,2} + 2a_n + 2\right)$의 값은?25)

① $\frac{13}{4}$　② 3　③ $\frac{11}{4}$

④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{9}{4}$

[TIP17] 등비급수의 수렴

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} (a_1 > 0)$는 $-1 < r < 1$일 때 수렴한다.

예제 026 [2019학년도 6월(나형) 11번]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?26)

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

[TIP18] 등비급수의 합

$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} (a_1 > 0)$는 $-1 < r < 1$일 때, $\dfrac{a_1}{1-r}$로 수렴한다.

예제 027 [2015학년도 9월(나형) 12번]

자연수 n에 대하여 $3^n \cdot 5^{n+1}$의 모든 양의 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$의 값은?27)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{7}{12}$ ③ $\dfrac{2}{3}$

④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

예제 028 [2015학년도 수능(나형) 28번]

자연수 k에 대하여

$$a_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{6}{k}\right)^{n} + 1}$$

이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} k a_k$의 값을 구하여라.28)

[TIP19] 급수의 진위판정

예의라고.

예제 029

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[29)]

ㄱ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$도 수렴한다.

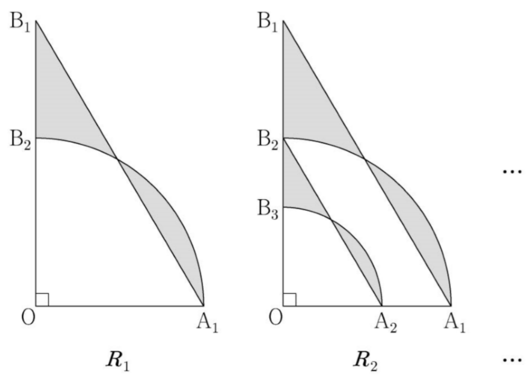
① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP20] 등비급수와 도형

① 첫 항을 잘 찾는다.
② 닮음비를 이용하여 공비를 찾는다.

예제 030 [2019학년도 수능(나형) 16번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA_1}}=4$, $\overline{\mathrm{OB_1}}=4\sqrt{3}$인 직각삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_1}}$인 원이 선분 $\mathrm{OB_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_1B_1}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_2}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 ◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 선분 $\mathrm{OA_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{OA_2}}$인 원이 선분 $\mathrm{OB_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{B_3}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OA_2B_2}$의 내부와 부채꼴 $\mathrm{OA_2B_3}$의 내부에서 공통된 부분을 제외한 ◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[30)]



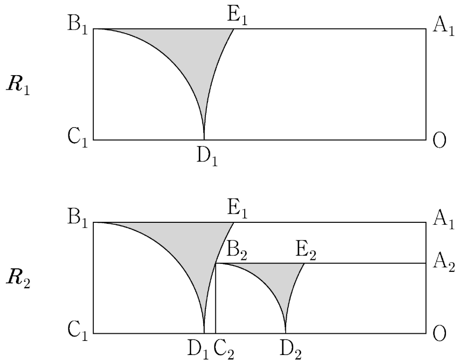
① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{6}\pi$
④ 2π ⑤ $\frac{13}{6}\pi$

[TIP21] 등비급수와 도형-부채꼴

중심과 연결한다.

예제 031 [2018학년도 9월(나형) 19번]

그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 D_1, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$인 원과 선분 A_1B_1의 교점을 E_1이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1, 선분 B_1E_1로 둘러싸인 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 D_1E_1 위의 점 B_2, 선분 OD_1 위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=3:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?[31]



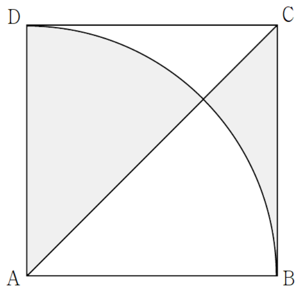
⋮ ⋮

① $4-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{7}{9}\pi$ ② $5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$ ③ $6-\sqrt{3}-\frac{7}{6}\pi$

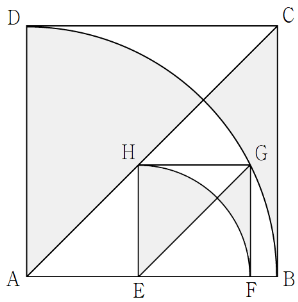
④ $7-\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{49}{36}\pi$ ⑤ $8-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{14}{9}\pi$

예제 032 [한성은 JP7108번]

그림과 같이 $\overline{AB}=1$인 정사각형 ABCD가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 부채꼴 ABD와 선분 AC를 그리고 만들어진 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB 위의 두 점 E, F, 호 BD 위의 점 G, 선분 AC 위의 점 H를 꼭짓점으로 하는 정사각형 EFGH를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 EFGH의 내부에 ⋈ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[32]



R_1



R_2

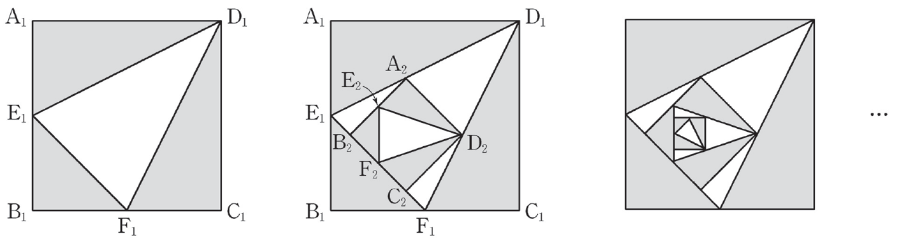
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[TIP22] 등비급수와 도형-닮음

야, 그냥 좌표에 올려.

예제 033 [2017학년도 6월(나형) 17번]

그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?33)



R_1 R_2 R_3 …

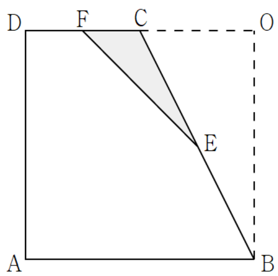
① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

예제 034 [한성은 GM5125번]

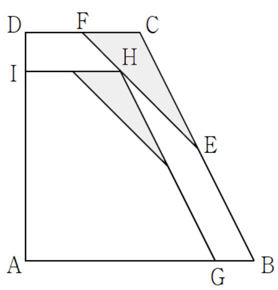
그림과 같이 $\overline{AB}=4$인 정사각형 ABOD가 있다. 선분 OD의 중점을 C, 선분 BC의 중점을 E, 선분 CD의 중점을 F라 하고 삼각형 CEF에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

선분 AB 위의 점 G, 선분 EF 위의 점 H, 선분 DA 위의 점 I를 꼭짓점으로 하고 사각형 ABCD와 닮음인 사각형 AGHI를 그리고 사각형 ABCD에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?34)



R_1



R_2

① $\frac{32}{11}$　② $\frac{34}{11}$　③ $\frac{36}{11}$

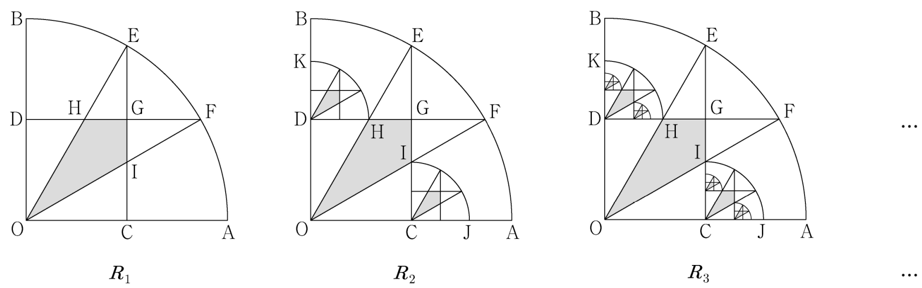
④ $\frac{38}{11}$　⑤ $\frac{40}{11}$

[TIP23] 등비급수와 도형-분화

공비에 개수비 곱해줘.

예제 035 [2020학년도 9월(나형) 18번]

그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자.
선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{CI}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{DH}$, 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 DHK를 그린다. 두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?35)



① $\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$ ② $\frac{7(3-\sqrt{3})}{15}$ ③ $\frac{8(3-\sqrt{3})}{15}$
④ $\frac{3(3-\sqrt{3})}{5}$ ⑤ $\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

[TIP24] 등비급수와 도형-대충

야매1) 전체 중에서 차지하는 비율을 고려해서 찍는다.
야매2) 첫 번째 도형을 제거하고 프렉탈의 성질로 찍는다.

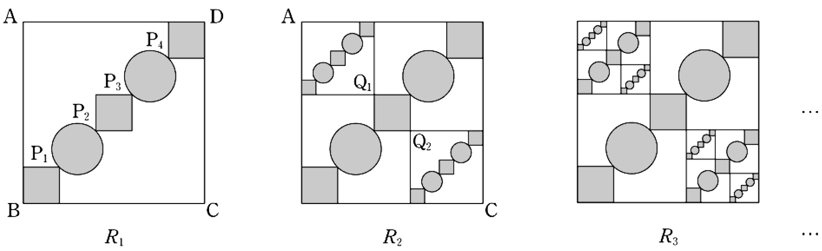
예제 036 [2016학년도 수능(나형) 15번]

그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, P_2P_3, P_4D를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 P_1P_2, P_2P_3를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 P_2P_3을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[36)]



① $\frac{24}{17}(\pi+3)$　② $\frac{25}{17}(\pi+3)$　③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$

④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$　⑤ $\frac{27}{17}(2\pi+1)$

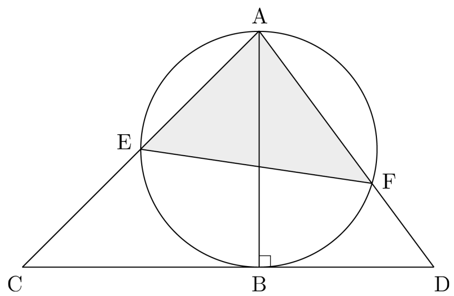
[TIP25] 삼각함수의 덧셈정리

예의상

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
③ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
④ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

예제 037

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 점 B에서 원에 접하는 직선 위에 $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{BD}}=3$인 두 점 C, D가 있다. 원과 두 직선 AC, AD가 만나는 점을 각각 E, F라 할 때, 삼각형 AEF의 넓이는?[37] (단, 점 B는 선분 CD를 내분한다.)



① $\frac{78}{25}$　② $\frac{96}{25}$　③ $\frac{104}{25}$
④ $\frac{112}{25}$　⑤ $\frac{24}{5}$

[TIP26] 탄젠트의 덧셈정리

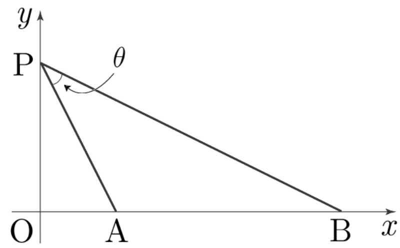
① $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

② $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

※ 직각 보이면 탄젠트로 식 써봐라.

예제 038

그림과 같이 x축 위의 두 점 $\mathrm{A}(20,\ 0)$, $\mathrm{B}(80,\ 0)$와 양의 y축 위의 점 $\mathrm{P}(0,\ y)$에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=\theta$라고 할 때, $\tan\theta$의 값이 최대가 되는 점 P의 y좌표를 구하여라.[38]

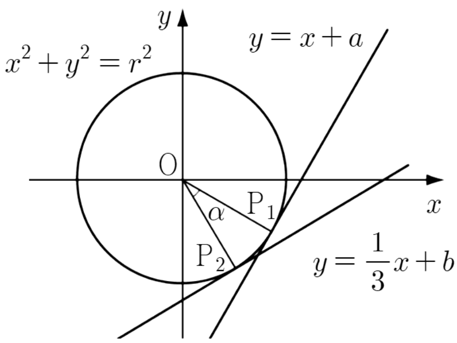


[TIP27] 탄젠트와 기울기

기울기 m인 직선 l에 대하여 x축의 양의 방향에서부터
반시계방향으로 l까지 잰 각을 α라 하면 $\tan\alpha = m$이다.
$\Rightarrow$ 각을 잴 때는 항상 x축의 양의 방향에서부터 반시계방향으로 잰다.

예제 039

두 직선 $y = x + a$, $y = \frac{1}{3}x + b$가 원 $x^2 + y^2 = r^2$에 접하는 점을 각각 P_1, P_2라 하고 $\angle P_1OP_2 = \alpha$일 때, $\tan\alpha$의 값은?[39] (단, $a < 0$, $b < 0$)



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

[TIP28] 배각공식과 반각공식

2배각공식

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

② $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

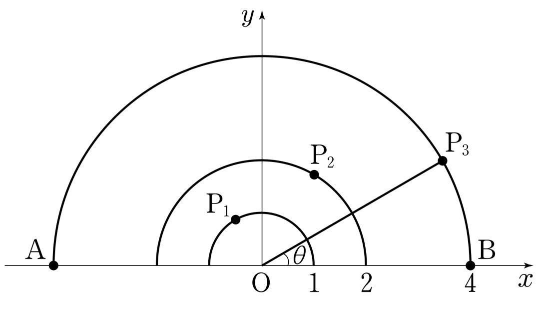
반각공식

③ $\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2}$ ④ $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$

※ 자주 쓰인다. 반드시 정리해두자.

예제 040 [2013학년도 9월]

그림과 같이 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1, 2, 4인 세 반원을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 세 점 P_1, P_2, P_3은 선분 OB 위에서 동시에 출발하여 각각 세 반원 O_1, O_2, O_3 위를 같은 속력으로 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. $\angle \mathrm{BOP}_3 = \theta$라 하고 삼각형 ABP_1의 넓이를 S_1, 삼각형 ABP_2의 넓이를 S_2, 삼각형 ABP_3의 넓이를 S_3이라 하자. $3S_3 = 2(S_1 + S_2)$일 때, $\cos^3\theta$의 값은?40) (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$)



① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

[TIP29] 삼각함수의 합성

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ (단, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

※ 약간 애매하지만 그냥 해두자.

예제 041

삼각방정식 $\sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x - 2 = 0$의 모든 실근의 합을 $\dfrac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.[41] (단, $0 \le x \le 2\pi$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[TIP30] 삼각함수의 치환

$\sin x$든 $\cos x$든 하나만 남길 수 있을 것 같으면 해본다.
※ 특히 $\cos 2x$는 $1-2\sin^2 x$도 되고 $2\cos^2 x-1$도 되므로 꿀맛이다.

예제 042

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 삼각방정식 $\sin 2x = \cos x$의 모든 해의 합은?[42)]

① $\dfrac{3}{2}\pi$　② 2π　③ $\dfrac{5}{2}\pi$
④ 3π　⑤ $\dfrac{7}{2}\pi$

[TIP31] 오일러 수

$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

$\Rightarrow$ $\lim_{x \to a}f(x)=0$일 때 $\lim_{x \to a}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}$꼴을 찾아준다.

예제 043

$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e^{50}$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.43)

예제 044

함수 $f(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}$ $(x>1)$에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?44)

ㄱ. $\lim_{x \to \infty}f(x)=e$

ㄴ. $\lim_{x \to \infty}f(x)f(x+1)=e^{2}$

ㄷ. $k \geq 2$일 때, $\lim_{x \to \infty}f(kx)=e^{k}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP32] 지수/로그함수와 부정형

① $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$　　② $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

③ $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$　　④ $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}$, $\lim_{x\to a}\frac{\ln(1+f(x))}{f(x)}$ 꼴을 찾아준다.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때 $x\to a$이면 $e^{f(x)}-1$, $\ln(1+f(x))$는 대충 $f(x)$이다.

예제 045

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+cx)}{e^{ax+b}-1}=5$를 만족시키는 상수 a, b, c에 대하여 $\frac{b+c}{a}$의 값을 구하여라.[45] (단, $a\neq0$)

예제 046 [2010학년도 6월]

$\lim_{x\to0}\frac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$의 값은?[46]

① $\frac{1}{e}$　　② $\frac{2}{e}$　　③ 1

④ e　　⑤ $2e$

[TIP33] 삼각함수와 부정형

① $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ② $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ ③ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때 $\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}$, $\lim_{x\to a}\frac{\tan f(x)}{f(x)}$, $\lim_{x\to a}\frac{1-\cos f(x)}{\{f(x)\}^2}$ 꼴로.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때, $x\to a$이면 $\sin f(x)$, $\tan f(x)$는 대충 $f(x)$이다.

$\Rightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=0$일 때, $x\to a$이면 $1-\cos f(x)$는 대충 $\frac{1}{2}\{f(x)\}^2$이다.

예제 047

$\lim_{x\to 0}\frac{bx(3^x-1)}{2-a\cos x}=-\ln 3$을 만족시키는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.47)

예제 048 [2009학년도 6월]

연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=q$이다. $p+q$의 값은?48)
(단, $p>0$, $q>0$이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

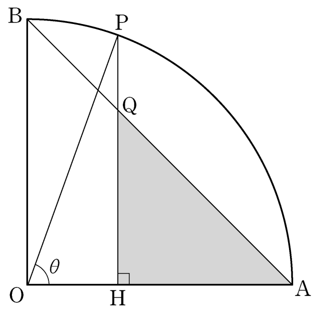
[TIP34] 삼각함수의 근사식

$\theta \to 0$이면, $\sin\theta = \tan\theta = \theta$, $1 - \cos\theta = \frac{1}{2}\theta^2$이다.

※ 선형근사 참고. 삼각함수의 극한과 도형 문항들에서 자주 쓰게 된다.

예제 049 [2017학년도 수능]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은?[49] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



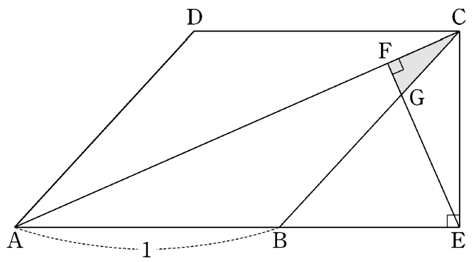
① $\frac{1}{8}$
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{5}{8}$

[TIP35] 직각삼각형 찾기

직각삼각형을 찾아서 길이를 옮겨라.

예제 050 [2018학년도 수능 17번]

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC의 교점을 G라 하자. $\angle DAB = \theta$일 때, 삼각형 CFG의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은?[50] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

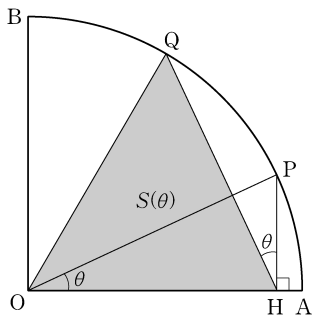


① $\frac{1}{24}$　② $\frac{1}{20}$　③ $\frac{1}{16}$

④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{1}{8}$

예제 051 [2019학년도 6월 16번]

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다.
호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, 호 BP 위에 점 Q를 $\angle \mathrm{POH} = \angle \mathrm{PHQ}$가 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{POH} = \theta$일 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?[51] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)



① $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

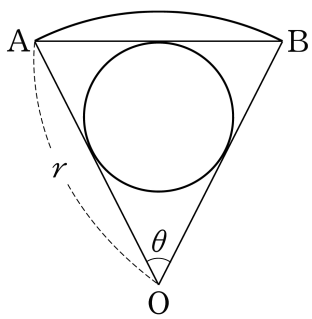
④ $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

[TIP36] 이등변삼각형의 수선

삼각형을 반으로 가르는 수선 내려라.

예제 052

그림과 같이 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1, 삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{l_2}{l_1}$의 값은?[52)]

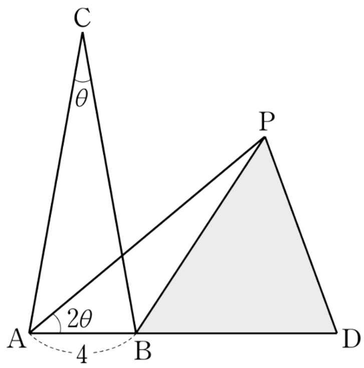


① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ π

④ $\frac{3}{2}\pi$　⑤ 2π

예제 053 [2014학년도 수능]

그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{ACB}=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AD}}$인 점 D를 잡고, $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AP}}$이고 $\angle\mathrm{PAB}=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}(\theta\times S(\theta))$의 값을 구하여라.[53] (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)

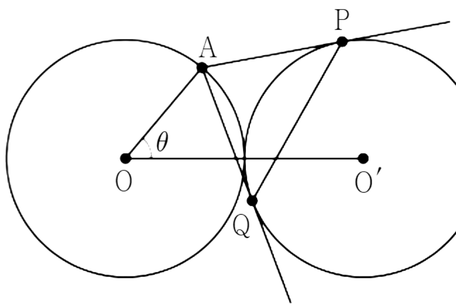


[TIP37] 원과 부채꼴

중심에서 이어라.

예제 054 [2017학년도 6월]

그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1이고 중심이 각각 O, O$'$인 두 원 O, O'이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A에서 원 O'에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하자. $\angle \mathrm{AOO'} = \theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta}$의 값은?[54] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



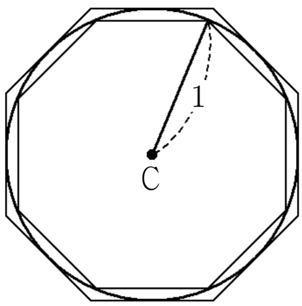
① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[TIP38] 정다각형

중심과 꼭짓점들끼리 이어서 n개의 이등변삼각형을 만들자.

예제 055

그림과 같이 중심이 C이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하는 정n각형 T와 내접하는 정n각형 S가 있다. 도형 T와 S의 둘레의 길이를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n^2\{f(n)-g(n)\}$의 값은?[55] (단, 그림은 $n=8$인 경우이다.)



① $\frac{1}{2}\pi^3$　　② π^3　　③ $2\pi^3$

④ π^2　　⑤ $2\pi^2$

[TIP39] 이등분선과 중선

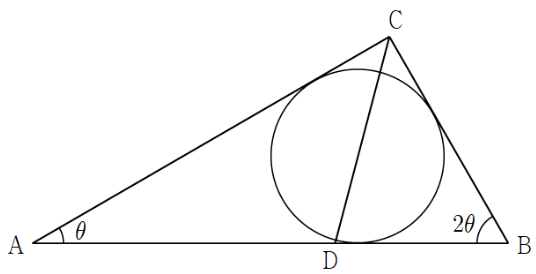
문제 풀다보면 한 번씩 언급하게 되니 정리해두자.

① $\triangle$ABC에서 BC의 중점을 M이라 하면,
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MB}^2)$이 성립한다.

② $\triangle$ABC에서 각 A의 이등분선과 BC의 교점을 P라 하면,
$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{CP}$이다.

예제 056 [한성은 PN9344번]

$\overline{AB}=1$, $\angle CAB=\theta$, $\angle CBA=2\theta$인 삼각형 ABC에 대하여 점 C와 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 지나는 직선이 직선 AB와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{CD}=f(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은?[56]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[TIP40] 코사인 법칙

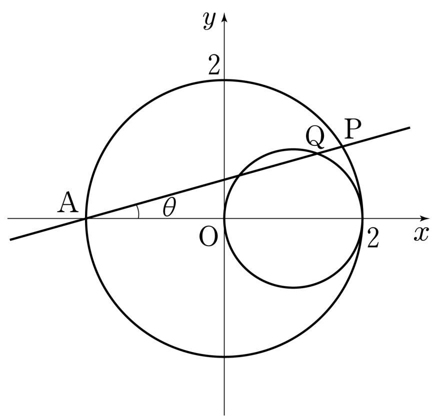
$\triangle ABC$에서

① $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ (두 변과 끼인각을 알 때, 나머지 한 변을 알려주는 식)

② $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (세 변을 알 때, 어떤 각의 코사인값을 알려주는 식)

예제 057 [2013학년도 9월]

그림과 같이 점 $A(-2, 0)$과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle OAP = \theta$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은?57)



① $\dfrac{5}{2}$　　② 3　　③ $\dfrac{7}{2}$

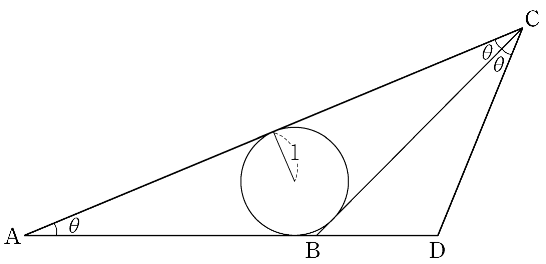
④ 4　　⑤ $\dfrac{9}{2}$

[TIP41] 사인 법칙

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름이 R일 때, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

예제 058 [2015학년도 수능]

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB=\angle BCA=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB=\theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\{\theta \times S(\theta)\}$의 값은?58) (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)



① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{8}{9}$ ③ $\dfrac{10}{9}$

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{14}{9}$

[TIP42] 삼각형의 넓이

① 밑변이 a이고 높이가 h인 삼각형 : $S=\frac{1}{2}ah$

② 두 변이 a, b이고 끼인각이 θ인 삼각형 : $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

③ 세 변의 길이가 a, b, c이고 내접원의 반지름이 r인 삼각형 : $S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

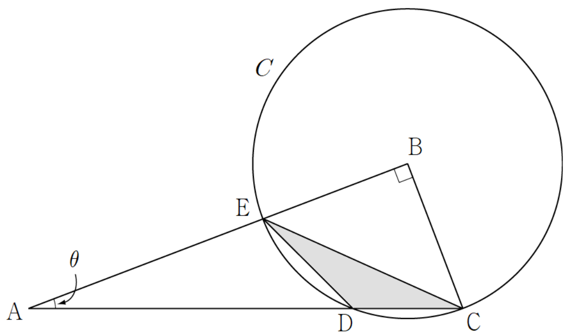
④ $(a,\ b)$, $(c,\ d)$, $(e,\ f)$를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 :$S=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} a & c & e & a \\ b & d & f & b \end{matrix}\right|$

⑤ 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 : $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

⑥ 세 변의 길이가 a, b, c이고 외접원의 반지름이 R인 삼각형 : $S=\frac{abc}{4R}$

예제 059 [한성은 UY6068번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC와 중심이 B이고 점 C를 지나는 원 C가 있다. 원 C와 두 선분 AC, AB의 교점을 각각 D, E라 하자. 삼각형 CDE의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?59) (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[TIP43] 내접원의 반지름

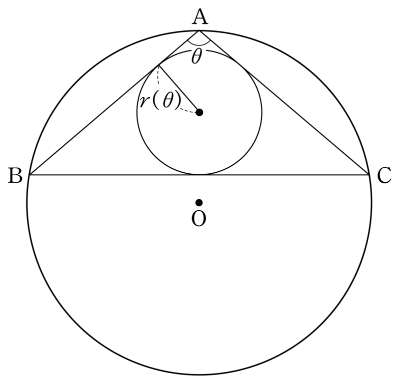
내접원의 반지름을 구할 때,

① 중심과 꼭짓점을 연결 $\Rightarrow$ 각의 이등분 등등 이용

② $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$를 이용해서 $\Rightarrow$ 복잡하지만 확실하게 풀리는 풀이

예제 060

반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하여라.60)

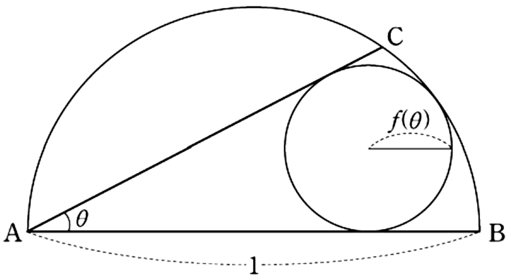


예제 061 [2016학년도 6월]

그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC = \theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α의 값을 구하여라.[61] (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



[TIP44] 0의 위치와 크기

① $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 부정형의 극한값을 구할 때는 0을 가지고 있는 인수를 파악한다.

$\Rightarrow$ 로피탈 때릴 때 유용하다. 0 아닌 것을 극한 밖으로 빼서 생각한다든가.

② 0(무한소)이라고 다 같은 0이 아니고 크기(차수)를 살펴보아야 한다.

※ $x \to 0$일 때, 다항함수라면 최저차항의 차수와 관련한다.

예제 062

함수 $f(x) = x^2 - x - 1$에 대하여 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때,

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)f(-x)}{x-\alpha} + \lim_{x\to\beta}\frac{f(x)f(-x)}{x-\beta}$$

의 값은?62)

① 2　② 4　③ 6

④ 8　⑤ 10

예제 063

함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{2x+3x^2-f(x)}{x+2x^2+f(x)} = 5$$

가 성립할 때, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{5x+3x^2-f(x)}{x+2x^2+f(x)}$의 값을 구하여라.63)

예제 064 [2009학년도 수능]

다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[64] (단, a, b는 실수이다.)

ㄱ. $m \ge n$
ㄴ. $ab \ge 9$
ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am = bn$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[TIP45] 선형근사

$x \to 0$일 때의 극한은 아래와 비슷하게 처리하면 된다.

① $\sin x = x$　② $\tan x = x$　③ $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2$

④ $e^x - 1 = x$　⑤ $\ln(1+x) = x$

※ $x \to 0$일 때, (다항함수라 쳤을 때) 최저차항의 차수와 관련한다. 대충 살자.

예제 065 [2011학년도 6월]

세 양수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b + \frac{c}{x^2}\right) = 2$$

일 때, $a+b+c$의 값은?65)

① 5　② 6　③ 7

④ 8　⑤ 9

예제 066

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos(a+2)x}{x\sin x} = 4$일 때, 상수 a의 값을 구하여라.66)

[TIP46] 선형근사 심화

근사식들의 최저차항이 상쇄되는 경우에는 선형근사를 이용할 수 없다.
※ 원칙적으로 출제 범위는 아닌 것 같지만 풀다보면 보인다. 정리해두자.
※ 최저차항 위의 고차항들을 뽑아내려면 테일러 전개를 배워야 한다.
⇒ 깊게 들어가지 말고, "쓰다 털리겠구나"라는 감각을 가지면 충분하다.

예제 067

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?67)

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=0$

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[TIP47] 로피탈의 정리

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수가 연속이고 $f(a)=g(a)=0$이면,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

이다.

예제 068 [2014학년도 6월]

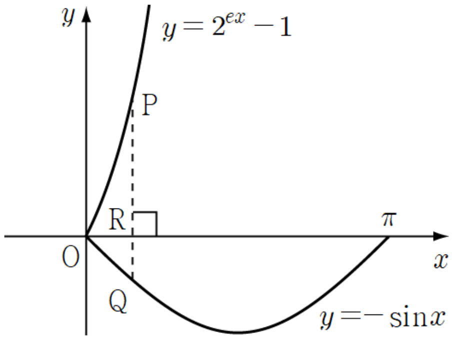
다항함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값은?68)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

예제 069

그림과 같이 곡선 $y=2^{ex}-1\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 위의 점 P에서 y축에 평행한 직선이 x축과 곡선 $y=-\sin x$와 만나는 점을 각각 R, Q라 하자. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{QR}}}$는 어떤 값에 가까워지는가?[69] (단, e는 자연로그의 밑이다.)



① $e\ln 2-2$ ② $e\ln 2-1$ ③ $e\ln 2$
④ $e\ln 2+1$ ⑤ $e\ln 2+2$

1) ④

2) ②

3) ①

4) ②

5) ①

6) 10

7) ②

8) 110

9) 23

10) 35

11) 48

12) 24

13) ③

14) ④

15) ⑤

16) ①

17) 16

18) ①

19) ④

20) ①

21) ④

22) ③

23) 5

24) ①

25) ①

26) ⑤

27) ①

28) 33

29) ①

30) ④

31) ②

32) ③

33) ⑤

34) ③

35) ①

36) ②

37) ④

38) 40

39) ②

40) ③

41) 7

42) ④

43) 25

44) ③

45) 5

46) ④

47) 1

48) ②

49) ①

50) ③

51) ①

52) ③

53) 16

54) ③

55) ②

56) ⑤

57) ④

58) ④

59) ④

60) 17

61) 25

62) ⑤

63) 11

64) ⑤

65) ①

66) 1

67) ③

68) ①

69) ④