원포인트 개념주입 C

방정식과 부등식

개념1

✏ 허수계수를 가진 이차방정식이 실근을 가지면 $\Rightarrow$ 복소수의 상등으로 푼다.
✏ 허수계수를 가진 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,
① D의 부호를 통해 실근인지 허근인지의 여부를 알 수 없다.
② $D=0$이면 중근을 가진다.

001.

x에 대한 이차방정식 $x^2-2ix+1=0$의 근을 구하여라.1)

002.

x에 대한 이차방정식

$$(i-1)x^2-2(k+i)x+i-5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 구하여라.[2]

003.

x에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+i)x+b+2i=0$의 해가 하나뿐일 때, 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3] (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

개념2

✔ 순환할 것만 같은 함수 : 넉넉하게 대입해보자.

004.

자연수 k에 대하여 $f_k(x)=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^k$일 때,

$$f_1\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f_2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+\cdots+f_{2010}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

의 값은?[4)]

① $i-1$ ② $i+1$ ③ $-i$

④ -1 ⑤ 1

005.

자연수 n에 대하여 $A(n)$, $f(n)$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $A(n)=i^n+(-1)^n n$
(나) $f(n)=A(1)+A(2)+\cdots+A(n)$

복소수 $z=f(10)+f(11)$에 대하여 z의 켤레복소수 $\overline{z}$라고 할 때, $z+\overline{z}$의 값을 구하여라.5)

006.

자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$을

$f(n)=(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}$

이라고 정의할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?6) (단, $i=\sqrt{-1}$)

ㄱ. $f(4)=32$
ㄴ. n이 홀수이면 $f(n)=0$이다.
ㄷ. 자연수 n에 대하여 $f(n)\geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

개념3

✔ 복소수 : $z=a+bi$라 놓고 대입

※ 복소평면도 살짝 개념 잡아두면 좋겠다.

007.

$z\overline{z}=1$을 만족하는 복소수 z에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?7) (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

ㄱ. 복소수 z는 무수히 많다.

ㄴ. $z^2=1$

ㄷ. $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^2$은 항상 실수이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

008.

$\overline{z}=-z^2$을 만족하는 복소수 z의 개수를 구하여라.[8] (단, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

009.

세 복소수 α, β, z에 대하여 항상 실수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[9] (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{z}$는 각각 α, β, z의 켤레복소수이다.)

ㄱ. $\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta$

ㄴ. $\dfrac{\overline{z}i}{1+z}+\dfrac{zi}{1+\overline{z}}$

ㄷ. $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)+(z+1)(z^2-z+1)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

✔ 근의 분리 : 그래프가 가질 수 있는 가능성을 면밀하게 조사한다.

개념4

010.

이차방정식 $x^2+(a-2)x-2a+4=0$이 $-2<x<1$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?10)

① $a<-6$　② $-6<a<2$　③ $2<a<3$
④ $3<a<4$　⑤ $a>4$

011.

이차방정식 $x^2-4x+2a=0$의 두 실근 α, β가 $\frac{1}{2} \le \frac{\beta}{\alpha} \le 2$를 만족할 때, 실수 a의 범위를 구하여라.11)

012.

두 방정식

$$x^2+2mx+1=0 \quad \cdots \text{㉠},$$
$$x^2+2x+m=0 \quad \cdots \text{㉡}$$

은 각각 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㉠의 두 근이 ㉡의 두 근보다 항상 크기 위한 실수 m의 값의 범위가 $a<m<b$일 때, $a+b$의 값을 구하여라.12)

개념5

✔ 방정식과 정수조건 : 대충 잘 ㅜㅜ

013.

이차방정식 $x^2-(m+5)x-m-1=0$의 두 근이 정수가 되도록 하는 모든 정수 m의 값의 곱을 구하여라.[13)]

014.

삼차방정식 $x^3+x^2+kx+3=0$의 세 근이 모두 정수일 때, 상수 k의 값을 구하여라.[14)]

015.

삼차방정식 $x^3-3x^2-(m-1)x+m+7=0$의 세 실근 α, β, γ가 모두 정수일 때, m의 값을 구하여라.[15)]

개념6

✔ $x^3=1$ 관련 문항들

016.

0이 아닌 세 복소수 α, β, γ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha+\beta+\gamma=0$

(나) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$

이때, $\frac{\gamma}{\alpha}+\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$의 값은?[16) (단, $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$는 $\frac{\alpha}{\beta}$의 켤레복소수이다.)

① $-i$ ② -1 ③ 0
④ i ⑤ 1

017.

방정식 $x^3+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.17)

$$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2+\cdots+\left(\omega^{18}+\frac{1}{\omega^{18}}\right)^2$$

018.

$x+\dfrac{1}{x}=-1$일 때, 양의 정수 n에 대하여 $P(n)$을

$$P(n)=(x^2+x)^n+(x^2+1)^n+(x+1)^n$$

이라 하자. $P(1)+P(2)+P(3)+\cdots+P(999)$의 값을 구하여라.18)

✏ $f(x)=0$의 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$이면 $f(g(x))=0$의 근은
$g(x)$가 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots$가 되는 x값들이다. (즉, $g^{-1}(\alpha),\ g^{-1}(\beta),\ \cdots$들이다.)

개념7

019.

x에 대한 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, x에 대한 이차방정식 $f(2x-1)=0$의 두 근의 합은?[19)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

020.

이차부등식 $f(x)>0$의 해가 $-2<x<5$일 때, 부등식 $f(2x-1)\geq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는?20)

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

021.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자. $\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$를 세 근으로 하는 삼차방정식을 $x^3-2x^2+3x-1=0$이라 할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?21)

① 14　② 15　③ 16　④ 17　⑤ 18

개념8

✏ 근이 α, β, γ인 삼차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$이라 쓸 수 있다.

022.

최고차항의 계수가 1인 x에 대한 사차다항식 $f(x)$에 대하여

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3$$

이 성립할 때, $f(x)$를 x^2-3x-4로 나눈 나머지를 구하여라.[22)]

023.

삼차다항식 $f(x)$가

$$f(1)=\frac{3}{2},\ f(2)=\frac{4}{3},\ f(3)=\frac{5}{4},\ f(4)=\frac{6}{5}$$

을 만족할 때, $f(5)$의 값은?[23)]

① $\frac{14}{13}$ ② $\frac{15}{13}$ ③ $\frac{16}{15}$
④ $\frac{17}{15}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

024.

이차방정식 $x^2-x+2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때,

$$f(\alpha)=2-\beta,\ f(\beta)=2-\alpha$$

를 만족하는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은?[24)] (단, $f(x)$의 x^2의 계수는 1이다.)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

개념9

✔ 항상 성립하는 부등식
① 일단은 그래프가 어떻게 생기는지 고민.
② 잘 안 되면 판별식 조사해본다.

025.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-5 \le (a-3)x+b \le x^2-x$가 성립할 때, 점 $(a,\ b)$가 나타내는 선분의 길이는 $\frac{p}{q}$이다. 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은?[25)]

① 15　② 23　③ 45
④ 75　⑤ 95

026.

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2+2(a-1)x+2a-1<y<x^2-2(a-3)x+9$를 만족시키는 y가 존재하도록 하는 실수 a의 값의 범위가 $m<a<n$일 때, $n-m$의 값을 구하면?[26)]

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{19}$

027.

임의의 실수 x, y에 대하여 부등식

$$x^2+y^2-xy+ay+3>0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?[27)]

① $-5<a<-4$ ② $-4<a<-3$ ③ $-3<a<3$
④ $3<a<5$ ⑤ $5<a<6$

1) $i \pm \sqrt{2}\,i$

2) -3

3) ④

4) ①

5) -6

6) ④

7) ④

8) 4

9) ⑤

10) ③

11) $\frac{16}{9} \leq a \leq 2$

12) $-\frac{9}{4}$

13) 13

14) -5

15) 5

16) ②

17) 36

18) -3

19) ④

20) ⑤

21) ①

22) $x+24$

23) ④

24) ①

25) ②

26) ②

27) ③