[복소수와 이차방정식]

B14 | 허수의 정의

개념1 제곱하여 -1이 되는 실수가 아닌 수를 허수단위라 하고 i로 나타낸다.

따라서 $i=\sqrt{-1}$ 이고 $i^2=-1$이다.

개념2 두 실수 a, b에 대하여 $a+bi$의 꼴로 나타내어지는 수를 복소수라 하고,

a를 실수부분, b를 허수부분이라 한다. 실수가 아닌 복소수를 허수라 한다.

개념3 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $a+bi$에 대하여 허수부분의 부호만 바꾼

복소수 $a-bi$를 $a+bi$의 켤레복소수라 하고, 이를 기호로 $\overline{a+bi}$로 나타낸다.

예제1 다음을 허수단위 i를 이용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt{-2}$ (2) $\sqrt{-9}$

(3) $\sqrt{-12}$ (4) $\sqrt{-9}+\sqrt{-4}$

예제2 다음을 간단히 하여라.

(1) i^2 (2) i^3

(3) i^4 (4) $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

(5) $\sqrt{-2}\sqrt{-8}$ (6) $\sqrt{-2}\sqrt{3}$

개념4 음수의 제곱근

$a>0$일 때, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$이다.

B14E1 | 제곱근과 부호

개념1 $a<0$, $b<0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고 그 외에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

개념2 $a>0$, $b<0$이면 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이고 그 외에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

eg) 다음이 성립하지 않는 예를 들어라.

(1) $\sqrt{a^2}=a$ (2) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

(3) $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ (4) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

✓ 역명제에서는 등호조건도 주의하자.

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $a\le 0$, $b\le 0$이다.

② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$이면 $a\ge 0$, $b<0$이다.

예제1 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$를 만족하는 실수 a, b에 대하여 .

$\sqrt{(a-b)^2}-\sqrt{b^2}+|a+2|$을 간단히 하여라.

예제2 $\sqrt{1-x}\sqrt{x-3}=-\sqrt{-x^2+4x-3}$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

B15 | 허수의 연산

✓ 복소수의 사칙연산 : i를 문자처럼 다루다가 i^2 나오면 -1로 처리.

예제1 다음을 간단히 하여라.

(1) $(2-i)(-3+4i)$

(2) $\dfrac{3+2i}{2+i}$

(3) $(1+i)^3$

(4) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$

B15E1 | 허수의 순환성

개념1 $i^4=1$이므로 i^n을 처리할 수 있다.

※ 1, -1, i, $-i$ 외에도 몇 번 곱하다 보면 1이 나오는 복소수가 존재한다.

✓ 어떤 복소수 z에 대하여 $z^n=1$이면 $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$이다.

예제1 다음을 계산하여라.

(1) $i+i^2+i^3+i^4$

(2) $1+i+i^2+\cdots+i^{100}$

(3) $1+\dfrac{1}{i}+\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{i^{100}}$

(4) $\dfrac{1}{i^{99}}$

예제2 다음을 계산하여라.

(1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{21}$

(2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2}+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4}+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{6}+\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{8}$

(3) $i+2i^2+3i^3+\cdots+30i^{30}$

예제3 $\alpha=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) α^2

(2) α^3

(3) α^4

(4) $\alpha^2+\alpha+1$

(5) $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{15}$

B16 | 복소수

개념1 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $a+bi$에서 $b=0$이면 실수가 되고,

$a=0$, $b\neq0$인 경우를 순허수라 한다.

✓ '제곱해서 음수가 된다.'와 '순허수'는 서로 동치이다.

예제1 $z=(x^2-2x-3)+(x+1)i$가 순허수가 되게 하는 실수 x의 값을 구하여라.

예제2 $\{a(1+i)+b(2-i)\}^2=-1$을 만족하는 실수 a, b의 값을 구하여라.

개념2 복소수의 상등

$a+bi=c+di$일 때, a, b, c, d가 실수이면 $a=c$, $b=d$이다.

※ 복소수는 무조건 (실수)+(실수)i의 꼴로 정리하면 좋다.

cf) 두 복소수 x, y에 대하여 $x+yi=0$이면 $x=y=0$인가?

예제3 $(2+3i)x-(1-2i)y=5+4i$를 만족하는 실수 x, y의 값을 구하여라.

예제4 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{3}{3-i}$를 만족하는 실수 x, y의 값을 구하여라.

개념3 켤레복소수에 대한 다음의 성질들을 증명해보자.

(1) $\overline{\overline{z}}=z$

(2) $\overline{z}=z$이면 z는 실수이다.

(3) $z+\overline{z}$는 실수이다.

(4) $z\cdot\overline{z}$는 실수이다.

(5) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(6) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

※ 켤레가 나오면 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 놓고 푼다.

예제5 $(1+i)z+3\overline{z}=11+i$를 만족하는 복소수 z를 구하여라.

cf) $\overline{z-zi}=1+3i$를 만족하는 복소수 z를 구하여라.

B17 | 이차방정식의 풀이

개념1 이차방정식의 근의 공식

x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$이다.

※ 증명도 해보자. 완전제곱식을 만들면 된다.

※ 일반적으로 이차방정식의 계수는 실수, 근은 복소수의 범위에서 생각한다.

✓ 이차방정식의 근 중 실수인 것을 실근, 허수인 것을 허근이라 한다.

✓ 이차방정식을 보면 일단

① 인수분해를 시도한다.

② 잘 안 되면 우울해하면서 근의 공식.

✓ 짝수 근의 공식도 외워둬 : $\dfrac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$

개념2 판별식과 근의 판별

a, b, c가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $D=b^2-4ac$라 하면

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$이면 중근을 갖는다.

(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

※ 이차방정식이 실근을 가질 조건은 $D \geq 0$이다.

※ 중근은 '하나의 실근'이다. 가끔 '서로 같은 두 실근'같은 표현을 보는데 솔타한 개념이니 조심하자. $\Rightarrow$ 'n차방정식의 근은 n개다.' 때문이긴 한데 나중에 근의 개수라던가 하는 문제를 풀 때는 그렇게 안 할꺼면서...

※ 허수계수를 가진 이차방정식 : 근의 공식은 가능하지만 판별식은 불가능하다. 보통 '실근을 가진다.'의 문제이고, 복소수의 상등을 이용하여 해결한다.

예제2 x에 대한 이차방정식 $(2+i)x^2+(1+2i)x+a+i=0$이 실근을 가질 때, 실수 a의 값을 구하여라.

cf) 이차방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$을 풀어라.

B18 | 이차방정식의 근과 계수와의 관계

개념1 x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

① $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

② $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

예제1 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때~

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

(3) $(\alpha-1)(\beta-1)$

(4) $(\alpha-\beta)^2$

(5) $|\alpha-\beta|$

(6) $\alpha^3+\beta^3$

예제2 이차방정식 $x^2-12x+k=0$의 두 근의 비가 $1:2$일 때, k의 값을 구하여라.

개념2 합이 A, 곱이 B인 두 수는 이차방정식 $x^2-Ax+B=0$의 두 근이다.

예제1 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ x+y=8 \end{cases}$를 풀어라.

예제2 $x^2-x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고

이차항의 계수가 1인 이차방정식을 써라.

예제3 대각선의 길이가 10이고 둘레의 길이가 28인 직사각형의

가로와 세로의 길이를 구하여라.

개념3 켤레근 : 계수가 실수인 이차방정식의 근이 허수 z일 때,

켤레복소수 $\overline{z}$도 그 이차식의 근이 된다.

예제4 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $\dfrac{1}{1+i}$일 때,

실수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

개념4 이차방정식 $x^2-Ax+B=0$에서 A와 B의 부호에 의해

근들의 부호를 판별할 수 있다.

예제5 $x^2-2(m-1)x-m+3=0$의 두 근이 모두 양수일 때,

예제6 $x^2+4(a-3)x+a-5=0$의 두 근은 서로 부호가 다르고,

음수 근의 절댓값이 양수 근보다 클 때,

[이차방정식과 이차함수]

B19 | 이차함수의 그래프1 (꼭짓점)

개념1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

$y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고칠 수 있으므로

$y=ax^2$의 그래프를 $(p,\ q)$만큼 평행이동 시킨 그래프이다.

※ $(p,\ q)$는 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$이다.

※ $a>0$이면 $x=p$에서 최솟값 q를 가지고, 최댓값은 없다.

$a<0$이면 $x=p$에서 최댓값 q를 가지고, 최솟값은 없다.

예제1 이차함수 $y=x^2+2ax+a+1$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=x+1$ 위에~

예제2 $0\le x\le 3$에서 정의된 이차함수 $f(x)=3x^2-6x+k$의 최댓값이 4일 때,

$f(x)$의 최솟값을 구하여라.

예제3 이차함수 $y=x^2-2ax+4a-4$의 최솟값을 m이라 할 때,

m의 최댓값을 구하여라.

예제4 $-2\le x\le 2$에서 $y=(x^2-2x-2)^2-4(x^2-2x-2)+1$가

가지는 값의 범위를 구하여라.

※ 꼭짓점의 자취에 대하여 알아 놓자. 여기저기 많이 쓰인다.

eg1) 함수 $y=x^2-2mx+3m+4$의 꼭짓점의 자취의 방정식을 구하여라.

eg2) 함수 $y=x^2+4kx+12k$의 꼭짓점의 자취의 방정식을 구하여라.

B20 | 이차함수의 그래프2 (절편)

개념1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$가 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 나타난다면,

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 x절편은 α와 β이다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x^2-5x+6$ (2) $y=x^2-2x-8$

(3) $y=x^2-9$ (4) $y=x^2-5x$

예제2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x^2-4x+4$ (2) $y=x^2+2x+1$

(3) $y=x^2+2$ (4) $y=x^2+2x+4$

예제3 이차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

두 x절편 사이의 거리가 6이고 $x=2$에서 최솟값을 가진다.

$f(x)$의 최솟값을 구하여라.

B21 | 판별식과 이차함수의 그래프

개념1 이차함수 $y=ax^2+bx+c$에서 $D=b^2-4ac$라 할 때, 함수의 그래프는

① $D>0$이면 x축과 두 점에서 만난다.

② $D=0$이면 x축에 접한다. (한 점에서 만난다.)

③ $D<0$이면 x축과 만나지 않는다.

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) 이차함수 $y=-x^2-4x+k$가 x축과 접할 때의 k값을 구하여라.

(2) 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2+a$가 x축과 만나도록 하는 a값의 범위를 구하여라.

B22 | 그래프의 교점과 방정식의 근

개념1 $f(x)=0$의 실근은 $y=f(x)$ 그래프의 x절편이다.

개념2 $f(x)=g(x)$의 실근은 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 두 그래프의 교점의 x좌표이다.

※ 허근은 그래프 상에 드러나지 않는다. 근이 없는 것으로 보면 된다.

예제1 두 유리수 p, q에 대하여 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프는

직선 $y=3x-1$과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 중 한 점의 x좌표가

$1-\sqrt{3}$일 때, p, q의 값을 구하여라.

예제2 이차함수 $y=-x^2+4x+2$의 그래프와 직선 $y=-x+1$의

두 교점 사이의 거리를 구하여라.

※ 직선과의 두 교점 사이의 거리 $|\beta-\alpha|\sqrt{1+m^2}$은 패턴으로 기억해 두자.

예제3 이차함수 $y=-x^2+4x-3$의 그래프와 직선 $y=2x+k$가 두 점에서 만날 때,

그 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{5}$라고 한다. 이 때 상수 k의 값을 구하여라.

개념3 직선과의 위치관계

$\Rightarrow$ 연립해서 판별식 때려본다.

예제4 이차함수 $y=x^2$과 직선 $y=x+k$가 접할 때의 k값을 구하여라.

예제5 점 $(-3, 1)$을 지나며 $y=-x^2+2x+5$의 그래프와 접하는

두 직선의 기울기의 곱을 구하여라.

B22E1 | 이차방정식의 근의 분리

개념1 이차방정식 $f(x)=0$의 근의 위치를 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 추적할 수 있다. 이 때 이차함수의 ① 축의 위치, ② 판별식, ③ 경계의 함숫값이 가지는 값의 범위를 나타내본다.

개념2 근의 분리의 기본형태

이차방정식 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a>0)$에서 $D=b^2-4ac$라고 할 때,

① 두 근이 모두 p보다 크다. $\Leftrightarrow$ $D>0$, $f(p)>0$, $-\dfrac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다. $\Leftrightarrow$ $D>0$, $f(p)>0$, $-\dfrac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다. $\Leftrightarrow$ $f(p)<0$

④ 두 근이 p, $q(p<q)$ 사이에 있다. $\Leftrightarrow$ $D>0$, $f(p)>0$, $f(q)>0$, $p<-\dfrac{b}{2a}<q$

예제1 이차방정식 $x^2-2kx+2-k=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

예제2 이차방정식 $x^2-kx+1+2k=0$의 두 근 사이에 1이 있을 때, 실수 k의 값의 범위를 구하여라.

※ 근의 분리는 기본적으로 그래프가 어떻게 생기는가를 조사하는 것이다.

그래프 많이 그려보자.

※ 일반적으로 대칭축이 보이면 쉬운 문제가 된다.

예제3 이차방정식 $x^2-2x+m=0$의 한 근만이 이차방정식

$x^2-3x+2=0$의 두 근 사이에 있을 때, m의 값의 범위를 구하여라.

예제4 이차방정식 $x^2+x-p=0$의 한 근을 반올림한 것이 1이다.

p의 값의 범위를 구하여라.

예제5 이차방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $-1<\alpha<0$이다.

β의 값의 범위를 구하여라.

[여러가지 방정식과 부등식]

B23 | 고차방정식

개념1 고차방정식의 풀이

① 일단 근 하나 찾고(무책임)

② $f(x)=0$에서 a가 근이면 $(x-a)g(x)=0$으로 인수분해 한다.

※ 애초에 근을 하나를 알아야 풀이를 계속해 나갈 수 있기 때문에

근본적으로 고차방정식을 푸는 방법을 알게 된 것은 아니다.

예제1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-x-6=0$

(2) $x^3-x^2+x-1=0$

예제2 방정식 $x^3-ax^2+1=0$의 한 근이 1일 때,

상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하여라.

예제3 x에 대한 삼차방정식 $x^3-(1+2k)x+2k=0$이 두 개의 실근을 갖도록

하는 실수 k의 값들의 합을 구하여라.

B24 | 삼차방정식의 근과 계수와의 관계

개념1 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면,

① $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

③ $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

예제1 방정식 $x^3-4x^2+x-6=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때,

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

예제2 $x^3+ax+1=0$ 의 세 근을 α, β, γ라 할 때,

$\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha^2}$, $\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta^2}$, $\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$를 세 근으로 하는 삼차방정식을 써라.

예제3 x에 대한 삼차방정식 $x^3+ax^2+3x+b=0$의 한 근이 $1+2i$ 일 때,

$a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이다.)

B24E1 | 다항식의 구성

개념1 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$이면 $f(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 가진다.

예제1 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 사차 다항식 $f(x)$에 대하여

$f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이 성립한다. ~

예제2 삼차 다항식 $f(x)$가 $f(1)=\frac{3}{2}$, $f(2)=\frac{4}{3}$, $f(3)=\frac{5}{4}$, $f(4)=\frac{6}{5}$을 만족할 때,

예제3 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$, $f(2)=2$를 만족시키는 x에 대한 이차식 $f(x)$ ~

B24E2 | 변형된 근을 가지는 다항식

예제1 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식 ~

예제2 삼차방정식 $x^3-3x^2+2=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때,

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하는 삼차방정식 ~

예제3 x에 대한 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때,

x에 대한 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱을 구하여라.

B25 | 1의 세제곱근

개념1 $x^3=1$의 허근 중 하나를 ω라 한다. 오메가라 읽는다.

$w=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이다.

개념2 ω에 대하여 다음이 성립한다.

① $\omega^3=1$

② $\omega^2=\overline{\omega}$

③ $\dfrac{1}{\omega}=\omega^2$

④ $1+\omega+\omega^2=0$

⑤ $\omega\overline{\omega}=1$

⑥ $\omega+\overline{\omega}=-1$

※ 그게 그거인 식들도 있지만 자주 보이는 형태들이니 잘 확인해두자.

예제1 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) ω^{2000}

(2) $(1+\omega)(1+\omega^2)$

(3) $\omega^4+\omega^2+1$

(4) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5$

(5) $\omega^{100}+\dfrac{1}{\omega^{100}}$

(6) $1+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+\cdots+\dfrac{1}{\omega^{100}}$

(7) $\dfrac{\omega}{\overline{\omega}}+\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}$

(8) $\omega^{20}+\overline{\omega}^{10}+1$

개념2 $x^3=-1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음의 사실들을 증명해보자.

(1) $\omega^6=1$

(2) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5=0$

(3) $\overline{\omega}=-\omega^2$

(4) $\dfrac{1}{\omega}=-\omega^2$

(5) $\overline{\omega}=-\omega^2$

(6) $\dfrac{1}{\omega}=-\omega^2$

B26E1 | 복이차방정식

개념1 복이차방정식

① 짝수 차수의 항만으로 이루어진 방정식을 복이차식방정식이라 한다.

② x^2을 치환해서 인수분해가 되면 두 이차식의 곱으로 쓸 수 있다.

③ 위 방법으로 인수분해 되지 않는다면 "x^4항과 상수항"에 맞는

완전제곱식을 만들어 A^2-B^2의 꼴로 쓰고 인수분해 한다.

예제1 복소수 범위에서 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4-2x^2-3=0$

(2) $x^4+x^2+1=0$

예제2 복이차방정식 $x^4+ax^2+b=0$이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 말하여라.

※ 사실 어려운 문제라서 생각없으면 대충 '치환해서 두 양수근'하고 넘어가자.

B26E2 | 상반방정식

개념1 상반방정식

① 내림차순으로 쓸때, 계수들이 가운데 항을 중심으로

대칭으로 나타나는 방정식을 상반방정식이라 한다.

② 4차 상반방정식 : 양변을 x^2으로 나눈 후 $x+\dfrac{1}{x}$를 치환하여 푼다.

③ 5차 상반방정식 : $x=-1$이 항상 근이 되므로 $(x+1)$로 나누고 ㄱㄱ

예제1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$

(2) $x^5+3x^4-4x^3-4x^2+3x+1=0$

예제2 $x^5+3x^4-4x^3-4x^2+3x+1=0$의 근을 α라 할 때,

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$의 값을 모두 구하여라.

B26E3 | 실수 조건 부정방정식

개념1 실수 조건 부정방정식

한 문자에 대하여 정리한 후 $D\geq 0$을 사용한다.

※ 부정방정식의 상황 : 미지수의 개수보다 식의 개수가 적을 때

예제1 방정식 $(x-3y-4)^2+2(x+y+4)^2=0$을 만족하는 두 실수 x, y ~

예제2 방정식 $x^2-4xy+5y^2+2y+1=0$을 만족하는 두 실수 x, y ~

B26E4 | 정수 조건 부정방정식

개념1 미지수의 값이 자연수나 정수라는 조건이 있을 때,

(일차식)×(일차식)=(정수) 모양으로 만들어본다.

✓ 잘 안 되면 한 문자에 대하여 정리해본다.

예제1 방정식 $xy-x-3y=2$를 만족시키는 정수 x, y ~

예제2 방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$을 만족하는 양의 정수 x, y ~

예제3 방정식 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{(x+1)y}=\frac{1}{2}$을 만족시키는 정수 x, y ~

B26E5 | 절댓값이 포함된 방정식

개념1 절댓값 안쪽이 0이 되는 점들을 기준으로 범위를 나눠서 푼다.

$\Rightarrow$ 근은 나눈 범위 안쪽의 것만 유효하다.

✓ 가끔 제곱해서 푼다. $|A|^2 = A^2$

✓ 절댓값의 의미(원점에서부터의 거리)를 더 가끔 이용한다.

$\Rightarrow$ $|a-b|$는 수직선상에서 a에서 b까지의 거리이다.

※ 절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그려서 푸는 쪽이 바람직하다.

예제1 다음 방정식을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

(1) $2|x-4| = x$

(2) $2|x-4| = |x+2|$

(3) $x^2 + |3x-2| = 2$

B27 | 연립방정식

개념1 기본적으로 식 하나를 이용하여 문자 하나를 소거할 수 있다.

⇒ 미지수 n개의 값을 결정하기 위해서 n개의 등식이 필요하다.

예제1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-xy+y^2=19 \end{cases}$

예제2 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{y}=-1 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=3 \end{cases}$ 을 풀어라.

예제3 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-z=2 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ 을 풀어라. (원칙적으로 교과외)

B27E1 | 부정과 불능

개념1 연립일차식에서 두 방정식이 나타내는 직선의 기울기가 같을 때, 부정이나 불능이 일어난다. 그렇지 않은 일반적인 경우 1쌍의 근을 가진다.

예제1 연립방정식 $\begin{cases} ax+2y=3 \\ 4x+by=2 \end{cases}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 해가 무수히 많을 조건

(2) 해가 존재하지 않을 조건

B27E2 | 상수항 소거

개념1 연립이차식에서 상수항을 소거해서 푸는 풀이가 존재한다.

※ 생소할 수 있는 풀이이고 다르게 잘 안 풀리므로 기억해 두도록 하자.

예제1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2 - xy = 12 \\ xy - y^2 = 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 5 \end{cases}$

B27E3 | 공통근

개념1 두 방정식의 공통근은 두 방정식을 모두 만족시키는 근이므로,

두 방정식을 연립시켜서 풀면 된다.

✓ 두 이차방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$이 공통근 α를 가진다면

두 식을 이용, 적당히 이차항을 소거한 방정식도 α를 근으로 가지게 된다.

예제1 x에 대한 두 방정식 $x^2 - 3x + a = 0$과 $x^2 - 6x + 8 = 0$이 공통근을 가질 때,

a의 값을 모두 구하여라.

예제2 두 이차방정식 $x^2 + kx + 3 = 0$, $x^2 + 3x + k = 0$이 오직 하나의 공통근을 가질 때,

k의 값과 공통근을 구하여라.

B27E4 | 대칭형과 교환형

개념1 대칭형 : $x+y$의 값과 xy값을 구해본다.

※ 미지수가 3개이면 $x+y+z$, $xy+yz+zx$, xyz의 값을 구해본다.

예제1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} xy+x+y=-5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

개념2 교환형 : 대충 빼본다. $(x-y)$가 인수로 나올지니..

예제2 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2+2y=1 \\ y^2+2x=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+x-y=1 \\ y^2+y-x=1 \end{cases}$

B28 | 부등식의 성질

개념1 세 실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$, $b>c$이면 $a>c$이다.

② $a>b$이면 $a+c>b+c$, $a-c>b-c$이다.

③ $a>b$, $c>0$이면 $ac>bc$, $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$이다.

④ $a>b$, $c<0$이면 $ac<bc$, $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$이다.

※ 기본 성질로 보다는 그래프 상에서 함숫값의 비교로 다루자.

예제1 다음을 증명하여라.

(1) $0<a<b$이면 $a^2<b^2$이다.

(2) $a>b>0$이면 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$이다.

B29 | 일차부등식

개념1 x에 대한 부등식 $ax+b>0$의 해는

① $a>0$이면 $x>-\frac{b}{a}$이다.

② $a<0$이면 $x<-\frac{b}{a}$이다.

③ $a=0$, $b>0$이면 모든 실수이다.

④ $a=0$, $b\le 0$이면 공집합이다.

예제1 부등식 $ax-1<5$의 해가 $x>-\frac{3}{2}$일 때, a의 값을 구하여라.

예제2 x에 대한 부등식 $(1-a)x>a+b$의 해가 $x<-2$일 때,

부등식 $(a-b)x\ge 6$의 해를 구하여라.

예제3 집합 $\{x|(a^2-3)x\le a(2x+4)\}$가 공집합이 되게 하는 a의 값을 구하여라.

B30 | 이차부등식

개념1 $D \geq 0$인 이차부등식의 풀이

① $\alpha < \beta$일 때, $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$의 근은 $\alpha < x < \beta$이다.

② $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$의 근은 $x < \alpha$ or $\beta > \beta$이다.

※ 이차함수의 개형과 연계해서 설명할 수 있도록 해두자.

예제1 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+2x-3 \leq 0$

(2) $x^2-x-2 > 0$

(3) $6x^2-x-1 \geq 0$

(4) $x^2-4x+2 \leq 0$

예제2 이차부등식 $x^2-6x+1 \leqq 0$의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$일 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하여라.

예제3 이차부등식 $ax^2+3x+4 \leq 0$의 양수인 해 중 최소가 4일 때.

상수 a의 값을 구하여라.

B31 | 이차부등식의 특수해

개념1 $D \leq 0$인 이차부등식의 풀이 : 그래프를 그려서 생각한다.

예제1 다음 이차부등식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-2x+2<0$ (2) $x^2-2x+2>0$

(3) $x^2-2x+2 \leq 0$ (4) $x^2-2x+2 \geq 0$

(5) $x^2-4x+4<0$ (6) $x^2-4x+4>0$

(7) $x^2-4x+4 \leq 0$ (8) $x^2-4x+4 \geq 0$

예제2 부등식 $x^2-2(k-2)x+9>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

예제3 이차부등식 $x^2-6x+(a-3) \leq 0$의 근이 존재하지 않을 때, a의 값의 범위를 구하여라.

B32 | 절댓값이 포함된 부등식

개념1 절댓값이 포함된 부등식 다루는 방법

① $|x| < a$의 근은 $-a < x < a$

② $|x| > a$의 근은 $x < -a$ 또는 $x > a$이다.

③ 절댓값 안쪽이 0이 되는 점들을 기준으로 범위를 나눠서 푼다.

④ $|A|^2 = A^2$이므로 적당히 제곱해본다.

⑤ 그래프를 그리면 개편함. 그래프 진리.

예제1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+2| > 3$

(2) $|x-1| < x+2$

(3) $2|x-4| < |x+2|$

(4) $x+2|x| > 12$

(5) $x^2 - 5|x| + 4 \leq 0$

(6) $||x-1|-2| \leq 3$

예제2 이차부등식 $x^2+2x-15<0$과 $|x-a|<b$의 해가 서로 같을 때, a와 b의 값을 구하여라.

B33 | 연립부등식

개념1 해들의 집합을 수직선 상에 잘 표시한다.

✓ $A(x)<B(x)<C(x)$의 근은 $\begin{cases} A(x)<B(x) \\ B(x)<C(x) \end{cases}$의 근과 같다.

예제1 다음 연립부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 3x-6\geq 0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+2x-3\leq 0 \\ x^2-8x-9>0 \end{cases}$

(3) $x<x(x-3)\leq 5(x-3)$

예제2 연립부등식 $2x^2+1<3x\leq x+a$의 해가 $\frac{1}{2}<x\leq 1$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

예제3 두 부등식 $x^2-(a+3)x+2a<0$, $x^2-4x>0$을 동시에 만족하는 정수 x의 값이 5뿐일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

예제4 연립부등식 $\begin{cases} x^2-x-2<0 \\ (x+1)(x-a^2-a)\geq 0 \end{cases}$의 해가 존재하지 않을 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.