[다항식의 연산]

B01 | 다항식의 덧셈과 뺄셈

개념1 x에 대한 다항식 : $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ (n은 음이 아닌 정수)

eg) $x+\dfrac{1}{x}$은 다항식이 아니다. $x+|x|$는 다항식이 아니다.

✓ 다항식의 덧셈과 뺄셈 : 동류항끼리 모아서 정리한다.

✓ 다항식의 덧셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙이 성립한다.

예제1 두 다항식 $A=3x^2+xy+3y^2$, $B=4x^2-2xy+2y^2$에 대하여

$2(A-X)=B-X$를 만족시키는 다항식 X를 구하여라.

B02 | 다항식의 곱셈

✓ 다항식의 곱셈에 대하여 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립한다.

예제1 $A=x+1$, $B=2x-3$, $C=-x+2$에 대하여 $A(B+C)=AB+AC$임을 보여라.

예제2 다음을 전개하여라.

(1) $(a+b+c)^2$ (2) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

B03 | 곱셈공식1 (2차)

개념1 중학교 곱셈공식

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (4) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5) $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

예제1 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $ab+bc+ca$

(2) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

(3) $a^4+b^4+c^4$

B04 | 곱셈공식2 (3차)

개념1 3차 곱셈공식

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(4) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

예제1 다음을 전개하여라.

(1) $(a+2b)^3$

(2) $(2x-3y)^3$

(3) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

예제2 $x+y=2$, $xy=-1$일 때 다음을 구하여라.

(1) x^2+y^2

(2) $|x-y|$

(3) x^3+y^3

(4) x^4+y^4

예제3 $x+y=2$, $x^3+y^3=14$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) xy

(2) x^2+y^2

(3) x^4+y^4

(4) x^5+y^5

예제4 다음 물음에 답하여라.

(1) $a-b=5$, $ab=-6$일 때, a^3-b^3과 a^2-b^2의 값을 구하여라.

(2) $x^2-3x-1=0$일 때, $x^3-\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하여라.

B05 | 곱셈공식3 (기타)

개념1 가르칠지 말지 약간 고민되는 공식들

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

(3) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(4) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

※ 사실 (2) 같은 경우는 곱셈공식이라고 부를 수도 없는데

(1)과 연계해서 식의 값을 물어보는 문제가 출제되니 알아두자.

예제1 $x+y+z=a$, $xy+yz+zx=b$, $xyz=c$일 때, 다음을 a, b, c로 나타내어라.

(1) $x^2+y^2+z^2$

(2) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

(3) $(x+y)(y+z)(z+x)$

(4) $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)$

예제2 $a-b=1+\sqrt{5}$, $b-c=1-\sqrt{5}$ 일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값은?

예제3 $a+b+c=\sqrt{3}$, $ab+bc+ca=1$일 때, abc의 값은?

예제4 $a+b+c=4ab+bc+ca=3abc=2$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

[나머지 정리]

B06 | 다항식의 나눗셈

✓ 다항식의 나눗셈을 할 줄 알아야 한다.

개념1 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$A=BQ+R$

이 성립한다. 이때 R의 차수는 B의 차수보다 낮다.

개념2 다항식 A를 다항식 B로 나누었을 때의 나머지가 0이면

A는 B로 나누어 떨어진다고 한다.

예제1 나누기 한 번 해봐봐.

(1) $(3x^2+5x-9)\div(x+4)$

(2) $(x^3-3x^2+4x+5)\div(x^2-2)$

B07 | 조립제법

✓ 어떤 다항식을 일차식 $x-a$로 나눌 때, 조립제법을 이용할 수 있다.

예제1 다항식 $x^2+mx-19$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 1이 되도록 m의 값을 구하여라.

예제2 x^3+ax^2-3x+2를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

✓ 검산식을 잘 조절하여 $ax+b$로 나누는 나눗셈을 할 수 있다.

예제3 다항식 $f(x)$를 $x+\frac{3}{2}$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라 할 때, $f(x)$를 $2x+3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여라.

B07E1 | 연조립제법

예제1 모든 실수 x에 대하여 $x^3-3x^2+5x-4=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$이다.

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -3 & 5 & -4 \\
 & & 2 & -2 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 3 & 2 \; {\color{red}=c} \\
 & & 2 & 2 & \\
\hline
2 & 1 & 1 & 5 \; {\color{red}=b} & \\
 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 3 \; {\color{red}=a} & &
\end{array}
$$

B08 | 항등식의 미정계수법

개념1 x에 어떤 숫자를 대입하더라도 등식이 성립할 때,

그 등식을 x에 대한 항등식이라 한다.

※ 항등식은 좌우변의 식이 완전히 같다는 뜻이며 정리하면 $0=0$이 나온다.

※ 계수비교법과 수치대입법

예제1 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립할 때~

(1) $ax^2+bx+c=3x^2-2x+4$

(2) $x^2-ax+4=bx(x-2)+c(x+2)(x-1)$

(3) $5x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

B08E1 | 다항식 계수들의 합

예제1 다항식 $f(x)=a_{10}x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+a_0$에서 다음을 구하는 방법을 말하여라.

(1) $a_{10}+a_9+a_8+\cdots+a_1+a_0$

(2) $a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$

예제2 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$일 때,

$a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

B09 | 나머지 정리

개념1 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$가 된다.

개념2 다항식 $f(x)$가 $x-a$로 나누어 떨어진다. $\Leftrightarrow$ $f(a)=0$

예제1 $f(x)=x^3+2x^2-ax+4$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 2가 되는~

예제2 $x^{100}+5x^{20}-mx-7$가 $x-1$로 나누어 떨어질 때~

개념3 다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나눈 나머지의 차수는 $g(x)$보다 작다.

예제3 다음 나눗셈을 했을 때의 나머지를 구하여라.

(1) $(x^3-2x+3)\div(x-1)(x-2)$

(2) $(x^{100}+3)\div(x^2-x)$

예제4 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -1, $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -7일 때, x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

예제5 이차 이상의 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(a+b)$를 구하여라. (단, a, b는 서로 다른 실수이다.)

B09E1 | 제곱식으로 나눈 나머지

✓ 인수를 묶어서 양변에서 날려주는 과정이 필요하다.

예제1 다항식 $P(x)=x^3+ax^2-8x+b$가 $(x-2)^2$으로 나누어 떨어질 때,

예제2 다항식 $x^{n+2}+px^{n+1}+qx^n$을 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^n(x-2)$일 때,

B09E2 | 검산식의 변형

개념1 네 다항식 A, B, Q, R에 대하여 $A=BQ+R$이고

R의 차수가 B의 차수보다 작으면 A를 B로 나눈 몫은 Q, 나머지는 R이다.

예제1 다항식 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x-1$일 때,

$f(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

예제2 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이라 할 때,

$xf(x)+5$를 $x-1$로 나눈 몫과 나머지를 구하여라.

[인수분해]

B10 | 인수분해 공식

✓ 인수분해는 하나의 다항식을 두 다항식의 곱으로 나타내는 것이다.

개념1 필수 인수분해 공식

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

※ 보통 '인수분해 공식'은 곱셈공식을 거꾸로 쓴 식이 십여개 소개되지만
위 세 공식 이외에는 '공식'을 이용하는 경우는 없다고 해두자.

※ 식을 인수분해할 때 필요한 중요한 요령은 다음 정도로 정리할 수 있다.

① 공통인수 묶기

② 낮은 차수의 문자에 대하여 내림차순으로 정리하기

$\Rightarrow$ 인수정리로 인수분해

③ 적당한 치환

예제1 인수분해 해보자.

(1) $4a^2-9b^2$ (2) $8x^3-y^3$

(3) a^8-b^8 (4) a^6-b^6

(5) $(x+y)^2-5(x+y)+4$ (6) $a^4+a^2c^2-b^2c^2-b^4$

B11 | 인수정리를 이용한 인수분해

개념1 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 가진다.

※ 식에 변수가 많아 복잡할 때는 낮은 차수의 문자에 대하여 정리한다.

예제1 인수분해 해보자.

(1) x^3+x^2+x+1 (2) $x^4+x^3-7x^2-x+6$

(3) $a^2+ab-9-3b$ (4) $x^2y+1-y-x^2$

(5) a^3-b^3 (6) $a^2+2ab+b^2-a-b$

예제2 인수분해 해보자.

(1) $x^2+3ax+2a^2+a-1$ (2) $x^2-2xy-3y^2$

(3) $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$ (4) $a^2+b^2+1-2ab+2a-2b$

(5) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ (6) $x^3+y^3-3xy+1$

(7) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ (8) $(a+1)(b+1)(ab+1)+ab$

※ 별로 중요하지 않은 재미있는 사실 :

두 일차식의 곱으로 인수분해 된다. ⇔ 판별식의 판별식이 0이다.

예제3 다항식 $x^2+4xy+3y^2-x+y+k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 구하여라.

B12 | 치환을 이용한 인수분해

✓ 적당히 요령껏 해야 되는데, 잘 나오는 형태는 기억해두도록 하자.

예제1 인수분해 해보자.

(1) $(x^2-2x+2)(x^2-2x-4)+5$

(2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-24$

(3) $(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)+x^2$

B13 | 복이차식과 상반식의 인수분해

✓ 방정식 할 때 하자.