[함수]

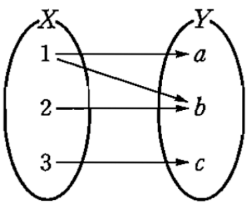
B16 | 함수의 뜻

개념1 $f: X \to Y$: f는 X에서 Y로 가는 함수이다.

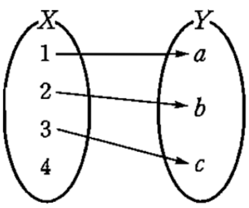
$\Rightarrow$ 함수 f는 X의 원소 하나를 Y의 원소 하나로 대응시킨다.

개념2 두 집합 X, Y에 대하여 대응 f가 X의 모든 원소에 대응되는 Y의 원소가 유일하게 결정될 때, 대응 f를 함수라 하고, 이때 집합 X를 정의역, 집합 Y를 공역이라 한다.

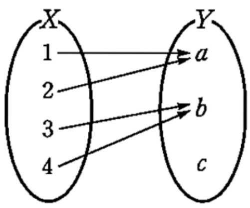
eg)



(X)



(X)



(O)

예제1 다음과 같은 정의역, 공역, 대응관계가 함수인지 아닌지 말하여라.

(1) $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$: x의 배수 ( )

(2) $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$: 2배 ( )

(3) $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$: $\frac{1}{2}$배 ( )

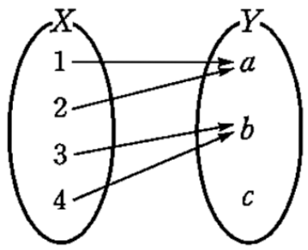
(4) $\mathrm{Q} \to \mathrm{Q}$: $\frac{1}{2}$배 ( )

B16E1 | 함숫값과 치역

개념1 $f(x)$: 함수 f에 의한 x의 함숫값

개념2 치역 : 함숫값들의 모임 $\{f(x)|x \in X\}$

예제1 다음과 같은 함수에 대하여,



(1) $f(1)=a$

(2) 정의역 : $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

(3) 공역 : $\{a,\ b,\ c\}$

(4) 치역 : $\{a,\ b\}$

예제2 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때,

① $f(x)=2x$이면 f는 X에서 Y로의 함수일 수 없다.

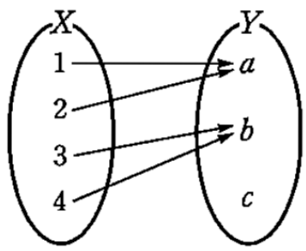
② $g(x)=2x-1$이면 g는 X에서 Y로의 함수일 수 있다.

B17 | 함수의 그래프

개념1 함수의 그래프 : $\{(x,\ f(x))|x \in X\}$

※ $(a,\ b)$가 $y=f(x)$ 위의 점이다. $\Leftrightarrow$ $f(a)=b$

예제1 다음과 같은 함수의 그래프를 그려라.



예제2 대응이 $f(x)=2x+1$일 때, 다음 그래프를 그려라.

(1) $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$인 경우

(2) $X=\{x|x \in \mathrm{R}\}$인 경우

예제3 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=x^2$

(2) $y=|x|$

(3) $y=\begin{cases} 2x & (x>0) \\ x & (x \le 0) \end{cases}$

(4) $y=[x]$

(5) $y=\dfrac{1}{x}$

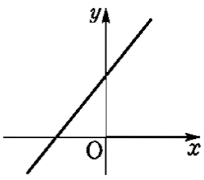
(6) $y=\sqrt{x}$

B17E1 | 방정식의 그래프

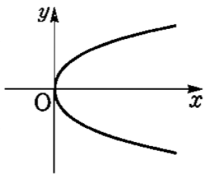
개념1 함수의 그래프가 되려면 : x값 하나에 y값 하나

예제1 다음 중 함수의 그래프가 될 수 있는 것을 모두 고르면?

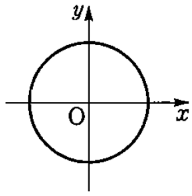
(ㄱ)



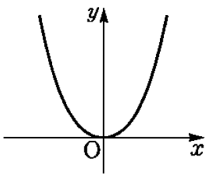
(ㄴ)



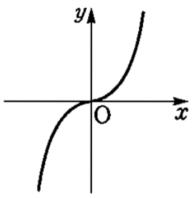
(ㄷ)



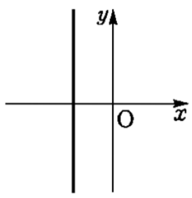
(ㄹ)



(ㅁ)



(ㅂ)



B18 | 여러가지 함수

개념1 유명 함수들

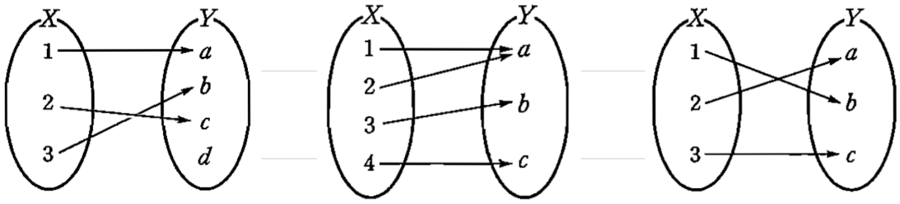
① 상수함수 : 모든 x에 대하여 $f(x)=c$

② 항등함수 : $X=Y$, $f(x)=x$

③ 일대일함수 : $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$

④ 전사함수 : $\{f(x) | x \in X\} = Y$

⑤ 일대일대응 : 일대일함수이면서 전사함수

eg) 

개념2 함수의 개수

eg) $X=\{a,\ b,\ c\}$에서 $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$인 $\left\{\begin{array}{l}\text{함수}\\ \text{상수함수}\\ \text{일대일함수}\end{array}\right.$ 의 개수는?

개념3 그래프의 모양

① 상수함수 $\Rightarrow$ x축과 평행

② 항등함수 $\Rightarrow$ $y=x$ 위에

③ 일대일함수 $\Rightarrow$ 단조증가/단조감소

예제1 집합 R에서 R로의 함수 $f(x)=\begin{cases}(a^2+a)x & (x \ge 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$가 일대일 대응이 되게 하는 a값의 범위를 구하여라.

예제2 두 집합 $X=\{x|-2 \le x \le 3\}$, $Y=\{y|1 \le y \le 11\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일 대응일 때, a와 b의 값을 구하여라.

예제3 집합 $X=\{x|x \ge a\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)=x^2-2x-4$가 일대일 대응이 되게 하는 a의 값을 구하여라.

B18E1 | 기함수와 우함수

개념1 임의의 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 기함수,

임의의 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 우함수라 한다.

	기함수(홀함수)	우함수(짝함수)
함수식	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=f(x)$
그래프	원점에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭
다항식	홀수차만	짝수차만
함수의 예	$x,\ 2x^3-x,\ \frac{1}{x},\ \sin x$	$x^2,\ \lvert x\rvert,\ \cos x$

B18E2 | 주기함수와 대칭함수

개념1 임의의 x에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족하면 $f(x)$는 주기함수이다.

$\Rightarrow$ $f(x)=f(x+p)$를 만족하는 최소의 양수 p를 $f(x)$의 주기라 한다.

개념2 임의의 x에 대하여

① $f(x)=f(2a-x)$를 만족하면 $y=f(x)$는 직선 $x=a$에 대하여 대칭이다.

② $f(x)+f(2x-x)=2b$를 만족하면 $y=f(x)$는 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이다.

예제1 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2(0 \le x \le 1)$과 다음을 만족한다. 그래프를 그려라.

(1) $f(x)=f(x+1)$

(2) $f(x)=f(2-x)$

(3) $f(-x)-f(x)$ 이고 $f(1-x)=f(1+x)$

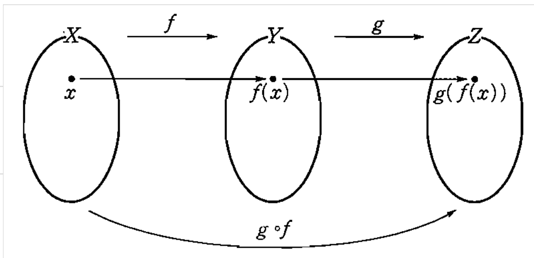
(4) $f(-x)=-f(x)$ 이고 $f(x)+f(2-x)=2$

B19 | 합성함수와 역함수

개념1 $f: X \to Y,\ g: Y \to Z$에 대하여

$$g \circ f: X \to Z, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

와 같이 합성함수 $g \circ f$를 정의한다.



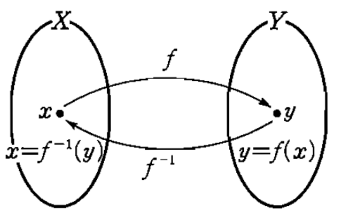
예제1 실수 전체를 정의역과 공역으로 하는 두 함수

$f(x)=2x+1,\ g(x)=x^2$에 대하여 $g \circ f$와 $f \circ g$를 정의하여라.

개념2 $f: X \to Y$에 대하여

$$f^{-1}: Y \to X, \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

와 같이 역함수 f^{-1}를 정의한다.



✓ 존재성 : 일대일대응에서만 존재한다.

✓ 구하는 방법 : ① $x \leftrightarrow y$ ② y로 정리 ③ 정의역 $\leftrightarrow$ 공역

예제2 다음 함수의 역함수를 구하여라.

(1) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad f(x) = 2x + 2$

(2) $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad f(x) = x^2$

(3) $f: \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}^+, \quad f(x) = x^2$

B19E1 | 역함수의 그래프

개념1 역함수의 그래프

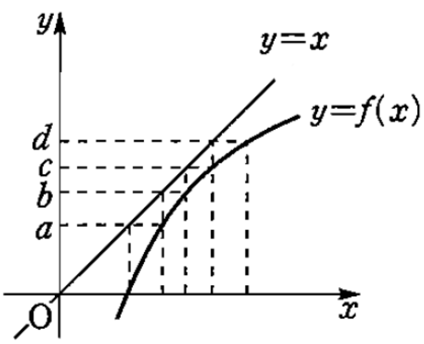
① $y = x$에 대칭시킨다.

② 축을 뒤집어서 본다.

eg1) $f(x) = 2x - 4$

eg2) $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$

예제1 오른쪽과 같은 함수 $f(x)$에 대하여 다음을 구하여라.



(1) $f(c)$ (2) $f(a)$

(3) $f(f(d))$ (4) $f^{-1}(b)$

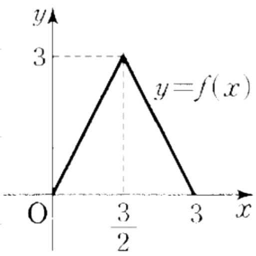
(5) $f^{-1}(c)$ (6) $f^{-1}(f^{-1}(0))$

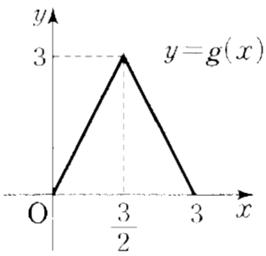
B19E2 | 합성함수의 그래프

예제1 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같다.

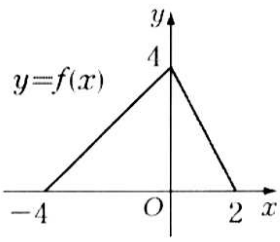
$y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형을 그려라.

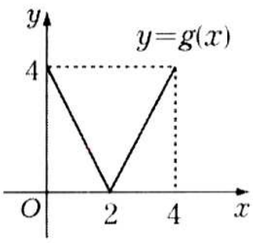
(1)





(2)





예제2 양수에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x & (0<x\le 2) \\ \dfrac{8}{x} & (2<x) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $(f\circ f)(x)$를 구하여라.

예제3 함수 $f(x)=\begin{cases} 3x+6 & (x\le -1) \\ -3x & (-1<x\le 1) \\ 3x-6 & (1<x) \end{cases}$ 에 대하여 $(f\circ f)(x)=f(x)$를

만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수를 구하여라.

B20 | 합성함수와 역함수의 성질

개념1 합성함수와 역함수의 성질

① 함수의 합성 : 교환 X, 결합 O

② $f \circ f^{-1} = I$, $f(f^{-1}(x)) = x$

③ $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

④ $I \circ f = I \circ f = f$

※ $f \circ g = I \Rightarrow g = f^{-1}$

예제1 두 함수 f, g에 대하여 $f \circ (g \circ f)^{-1} \circ g \circ g$를 간단히 하여라.

개념2 이런 것들 쓰라 그러면 끝이 없을 것 같지만,

① (상수) $\circ$ f = (상수)

② (일대일) $\circ$ (일대일) = (일대일)

③ (전사) $\circ$ (전사) = (전사)

B20E1 | 합성함수와 역함수의 연산

개념1 함수 연산의 기본

① 합성함수의 연산 : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

② 역함수 구하는 방법 : x와 y를 바꾼 후 y에 대하여 정리한다.

③ $f(a) = b$이면 $a = f^{-1}(b)$

예제1 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x + 2$일 때, 다음을 만족하는 함수 $h(x)$를 구하여라.

(1) $f \circ g = h$

(2) $f \circ h = g$

(3) $h \circ f = g$

예제2 함수 f의 역함수가 g일 때, 함수 $y = 3g(2x) + 6$의

역함수를 f를 이용하여 나타내어라.

[유리함수와 무리함수]

B21 | 유리식의 연산

개념1 $\dfrac{(\text{다항식})}{(\text{다항식})}$으로 나타난 식을 유리식이라 한다.

$\Rightarrow$ 곱하기, 나누기, 통분, 더하기, 빼기를 할 줄 알아야 한다.

$\Rightarrow$ 유리식은 분모가 0이 되지 않는 범위에서 정의되므로,

특별한 언급이 없으면 이를 정의역으로 본다.

예제1 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+x^2y^2+y^4} \div \dfrac{x^2-y^2}{x^3+y^3}$

(2) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(3) $\dfrac{x+6}{x^2-x-2}-\dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$

(4) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

B21E1 | 번분수의 연산

개념1 $\dfrac{\dfrac{A}{B}}{\dfrac{C}{D}}=\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

예제1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{\dfrac{x^2-1}{x}}{\dfrac{x+1}{x^2}}$ (2) $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$ (3) $x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$

B21E2 | 부분분수 변형

개념1 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{A-B}\left(\dfrac{1}{B}-\dfrac{1}{A}\right)$

예제1 다음을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{9\cdot10}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{19\cdot21}$

※ $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

B21E3 | 가비의 리

개념1 가비의 리 : $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$이면 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{x+y}{a+b}=\dfrac{px+qy}{pa+qb}$

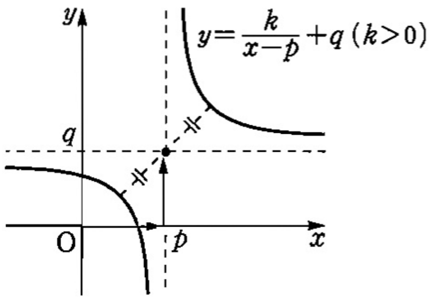
※ 이 식은 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$에서 $x=ka$, $y=kb$로 놓음으로써 증명, 대체 가능하다.

※ 가비는 사람이름이 아니다.

✓ $x:y=a:b$는 다음과 동치이다.

① $ay=bx$　　② $x:a=y:b$

③ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$　　④ $x=ak$이면 $y=bk$



예제1 $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}\neq 0$일 때, $\frac{y+z}{x}+\frac{x+y}{z}+\frac{z+x}{y}$의 값을 구하여라.

B22 | 유리함수의 그래프

eg) 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 그려보자.

$y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $y=\frac{1}{2x}$, $y=-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{2}{x}$

$\Rightarrow$ 대칭점, 점근선, 정의역, 치역

개념1 유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프

① $(0, 0)$을 대칭점, x축과 y축을 점근선으로 하는 쌍곡선이다.

② $k>0$이면 제1사분면과 제3사분면에,

$k<0$이면 제2사분면과 제4사분면에 생긴다.

③ $|k|$가 커지면 대칭점에서 멀어진다.

④ 직선 $y=x$와 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

개념2 유리함수 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 그래프 :

① $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$로 변형한다.

② 이는 $y=\dfrac{k}{x}$를 $(p,\ q)$ 평행이동 시킨 것이다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그리고 다음 사항들을 각각 구하여라.

① 대칭점, ② 점근선, ③ 정의역, ④ 치역, ⑤ x절편, ⑥ y절편

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ (2) $y=\dfrac{3x+1}{x+1}$

(3) $y=\dfrac{x+1}{2x+4}$ (4) $y=\dfrac{-x+3}{x}$

예제2 두 함수 $y=\dfrac{1-3x}{x}$와 $y=\dfrac{3x-5}{x-2}$의 그래프는 하나를 평행이동 시키면

서로 완전히 겹치게 할 수 있는지 말하여라.

예제3 함수 $y=\dfrac{3-4x}{2x-1}$의 그래프는 직선 $y=ax+b$에 대하여 대칭이다.

a와 b의 값을 구하여라.

B22E1 | 유리함수의 합성과 역함수

개념1 합성하는 방법 : x에 다시 넣어본다.

※ 몇 번 합성하다 보면 처음으로 돌아오기도 한다.

예제1 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$에 대하여 $f^2=f\circ f,\ f^3=f^2\circ f,\ \cdots,\ f^{n+1}=f^n\circ f$로 정의할 때, $f^{100}\left(\dfrac{1}{100}\right)$의 값을 구하여라.

개념2 함수 $y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$의 역함수는 $y=\dfrac{-bx+d}{ax-c}\left(=\dfrac{bx-d}{-ac+c}\right)$이다.

※ 그냥 x, y 서로 바꿔서 정리하면 된당.

예제2 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$에 대하여 $f(f(x))=x$가 성립할 때 a의 값을 구하여라.

B23 | 무리식의 연산

개념1 $\sqrt{(\text{다항식})}$과 같이 나타난 식을 무리식이라 한다.

✓ 무리식은 근호 안쪽이 0 이상이 될 때에만 정의된다.

예제1 함수 $\sqrt{4-2x}$가 가질 수 있는 최대 정의역을 구하여라.

예제2 무리식 $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$의 값이 실수가 되게 하는 x값의 범위를 구하여라.

개념2 $\sqrt{A^2}=|A|$

예제3 다음을 간단히 하여라.

(1) $-1<a<0$ 일 때, $\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(a+2)^2}$

(2) $2<a<3$일 때, $\sqrt{(a^2-9)^2}+\sqrt{(a^2-4)^2}$

cf) $\{\sqrt{A}\}^2=A$

※ 분모의 유리화 : 제곱근이 분모에 있으면 일단 없애보자.

예제4 다음 분수식에서 분모를 유리화 하여라.

(1) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

(2) $\dfrac{x}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{x}{2-\sqrt{x}}$

B23E1 | 이중근호

개념1 두 양수 a, b에 대하여,

① $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

② $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

예제1 다음 이중근호를 풀어 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{10+2\sqrt{24}}$ (2) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$

(3) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ (4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

(5) $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}}$ $(1<x<2)$ (6) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ $(1<x<2)$

B23E2 | 정수부분과 소수부분

개념1 $x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$)

실수 x는 정수부분 n과 소수부분 α의 합으로 유일하게 나타낼 수 있다.

x를 넘지 않는 최대 정수를 $[x]$라 하면 $n=[x]$, $\alpha=x-[x]$이다.

※ 소수부분을 구하기 위해서는 정수부분을 먼저 구해야 한다.

예제1 다음의 수를 정수부분과 소수부분의 합으로 나타내어라.

(1) $4+\sqrt{15}$

(2) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

(3) $\sqrt{1+\sqrt{45-20\sqrt{5}}}$

(4) $\sqrt{n^2+2n+2}$ (n은 자연수)

B24 | 무리함수의 그래프

eg) 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프를 그려보자.

$y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{-3x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{-x}$

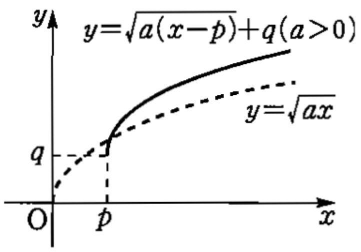
$\Rightarrow$ 꼭짓점, 생기는 방향, 정의역, 치역

개념1 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$의 그래프

① 근호 안쪽과 바깥쪽의 부호와 생기는 방향 :

② $y=\pm\sqrt{ax}$에서 $|a|$가 커지면 x축에서 멀어진다.

개념2 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프



① $y=\sqrt{a(x-p)}+q$로 변형한다.

② 이는 $y=\sqrt{ax}$를 $(p,\ q)$ 평행이동 시킨 것이다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그리고 다음 사항들을 각각 구하여라.

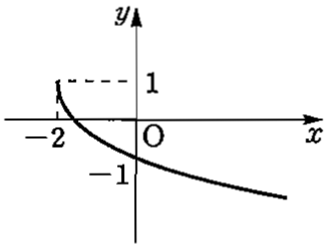
① 꼭짓점, ② 정의역, ③ 치역, ④ x절편, ⑤ y절편

(1) $y=\sqrt{-x+2}-1$ (2) $y=\sqrt{2x+4}+1$

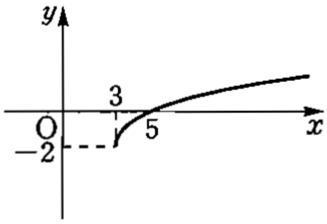
(3) $y=-\sqrt{3x+3}+2$ (4) $y=-\sqrt{-2x+4}+3$

예제2 다음은 무리함수 $y=\pm\sqrt{ax+b}+c$의 그래프이다. 식을 구하여라.

(1)



(2)



B24E1 | 무리함수와 직선

✓ 무리함수와 직선의 교점을 구할 때는

① 그래프를 그려서 근의 위치를 예상한다.

② 두 식을 연립하여 푼다.

※ ①이 필요한 이유 : ②에서 무연근을 띄울 수 있기 때문에.

※ 무리함수와 직선이 접하는 경우는 정리한 이차식의 판별식으로 판별한다.

예제1 두 함수 $y=\sqrt{x}$와 $y=x-2$의 교점을 구하여라.

예제2 $y=\sqrt{x-2}$와 $y=x+k$의 교점이 2개가 되는 k의 범위를 구하여라.

예제3 $y=\sqrt{x-2}$와 $y=mx+1$의 교점이 1개가 되는 m의 범위를 구하여라.

B24E2 | 무리함수의 역함수

✓ 역함수를 구하는 방법

① x와 y를 바꿔준다.

② y로 정리한다.

③ 정의역과 치역(=공역)을 바꿔준다.

예제1 다음 함수의 역함수를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x+1}$

(2) $y=\sqrt{-2x+4}-1$

개념1 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점은 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점이 된다.

cf) 역은 성립하지 않는다. 반례 : $y=1-x^2$ $(x \geq 0)$

예제2 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의

그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

예제3 함수 $f(x)=2\sqrt{x-a}$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때,

$f(x)=g(x)$의 교점의 개수를 구하여라.