

원포인트 개념주입 C
집합과 명제



개념1

✓ 집합의 정의 : 경우를 빠짐없이 잘 조사한다.

001.

전체집합 $U = \{x | x \text{는 } 50 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족할 때, $n(A)$ 의 최댓값을 구하여라.¹⁾ (단, $n(A)$ 는 집합 A 의 원소의 개수이다.)

$x \in A, y \in A$ 인 서로 다른 x, y 에 대하여
 $x + y$ 는 5의 배수가 아니다.



002.

집합 $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 다음과 같이 두 연산을 정의한다.

$$a_i \oplus a_j = a_n \quad (a_n \text{은 } a_i + a_j \text{를 } 5 \text{로 나눈 나머지})$$

$$a_i \otimes a_j = a_m \quad (a_m \text{은 } a_i \times a_j \text{를 } 5 \text{로 나눈 나머지})$$

두 집합 B, C 가

$$B = \{x \mid x = a_i \oplus a_i, a_i \in A\},$$

$$C = \{x \mid x = a_i \otimes a_i, a_i \in A\}$$

일 때, 다음 중 A, B, C 의 포함관계로 옳은 것은?²⁾

- ① $B = C \subset A$ ② $B \subset C \subset A$ ③ $C = B = A$
- ④ $C \subset B = A$ ⑤ $B \subset C = A$

003.

공집합이 아닌 자연수 전체 집합의 부분집합 A 가 다음 조건을 만족한다.

$$x \in A \text{이면 } \frac{36}{x} \in A \text{이다.}$$

이때, 집합 A 의 개수를 구하여라.³⁾



005.

집합 A 에 대하여 다음 두 조건을 만족하는 집합 T 를 집합 A 의 위상이라고 정의하자.

- (가) $\emptyset \in T, A \in T$
- (나) $P \subset A, Q \subset A$ 에 대하여 $P \in T, Q \in T$ 일 때,
 $(P \cup Q) \in T, (P \cap Q) \in T$

이 때, 집합 $A = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 원소의 개수가 가장 적은 위상의 원소의 개수와 가장 많은 위상의 원소의 개수의 합을 구하여라.⁵⁾

006.

집합

$$S = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{100}} \right\}$$

의 공집합을 제외한 모든 부분집합에 대하여 각 부분집합의 원소 중 최솟값들의 총합을 구하여라.⁶⁾



개념3

✓ 원소들의 합이나 곱에 주목해보자.

007.

0이 아닌 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여

$$x + y + z = 3, \{x, y, z\} = \left\{ \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right\}$$

이다. x, y, z 중 가장 큰 수 α 에 대하여 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값을 구하여라.⁷⁾



008.

집합 $A = \{1, 2, 3, 4, x\}$ 의 부분집합을 각각 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{32}$ 라 하자. 집합 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{32}$ 의 모든 원소들의 합이 256일 때 x 의 값은?⁸) (단, $x > 4$)

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

009.

자연수를 원소로 갖는 두 집합

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$$

$$B = \{a_i + d \mid a_i \in A\}$$

에 대하여 집합 A 의 모든 원소의 합은 32, $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은 62이다.

$A \cap B = \{4, 7, 9\}$ 일 때, 집합 A 의 원소 중 값이 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합을 구하여라.⁹) (단, $n(A) = 6$ 이다.)



개념4

✓ 부분집합의 개수 : 일단 2^n 개

010.

두 집합 $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset Y \subset B$ 를 만족하는 두 집합의 순서쌍 (X, Y) 의 개수는?¹⁰⁾

- ① 18 ② 21 ③ 23
- ④ 25 ⑤ 27



011.

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합 $K(U)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$K(U) = \{A \mid A \subset U, n(A) = 2\}$$

이때, $n(A \cup B) = 3$ 을 만족하는 두 집합 A, B 의 순서쌍 (A, B) 의 개수는?¹¹⁾
(단, $A \in K(U), B \in K(U)$ 이고, $n(X)$ 는 집합 X 의 원소의 개수이다.)

- ① 36개 ② 48개 ③ 60개
- ④ 72개 ⑤ 90개

012.

집합 $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이 있다. 10 이하의 자연수 n 에 대하여 S 의 부분집합 중 가장 큰 원소가 n 인 부분집합의 개수를 $M(n)$ 이라 하자. 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?¹²⁾

ㄱ. $M(3) = 4$
 ㄴ. $n > m$ 이면 $M(n) > M(m)$ 이다.
 ㄷ. $M(n+1) = \{M(n)\}^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 9$)

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



개념5

✓ 잘 센다.

013.

80명의 학생들을 대상으로 세 권의 책 A, B, C 중 적어도 한 권씩을 읽게 한 다음 각각의 책을 읽은 학생의 수를 조사하였더니 A 를 읽은 학생이 42명, B 를 읽은 학생이 35명, C 를 읽은 학생이 44명, 세 권 모두 읽은 학생이 16명이었다. 이 때, 세 권의 책 중에서 한 권만 읽은 학생의 수를 구하여라.¹³⁾



014.

어떤 고등학교 1학년 학생을 대상으로 축구, 농구, 야구 세 종목에 대한 선호도를 조사하였더니 축구를 좋아하는 학생이 전체의 64%, 농구를 좋아하는 학생이 전체의 52%, 야구를 좋아하는 학생이 전체의 38%이었다. 이들 중 한 종목만 좋아하는 학생은 전체의 46%, 세 종목 모두 좋아하는 학생은 전체의 12%일 때, 세 종목 모두 좋아하지 않는 학생이 12명이었다. 이때, 두 종목만 좋아하는 학생의 수를 구하여라.¹⁴⁾

015.

고등학교 1학년 어느 한 학급 학생들을 대상으로 보충학습 희망과목을 국어, 영어, 수학 중에서 한 과목 이상 선택하도록 하였다. 국어를 선택한 학생은 25명, 영어를 선택한 학생은 28명, 수학을 선택한 학생은 30명이었고, 과목수별로 선택한 학생 수는 표와 같다고 할 때, 한 과목만 선택한 학생수 $a+b+c$ 의 값을 구하여라.¹⁵⁾

구분	1과목만 선택			2과목만 선택			3과목 선택
	국어	영어	수학	국어, 영어	영어, 수학	수학, 국어	
인원 (명)	a	b	c	6	8	7	10



개념6

✓ 어떤과 모든 : 헷갈리니까 잘 해보자.

016.

다음 각 조건이 참이 되는 실수 a 의 값의 범위를 구하여라.¹⁶⁾

- (1) 모든 실수 x 에 대하여 $|x-1| > a$ 가 성립한다.
- (2) $0 < x < 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $|x-1| < a$ 가 성립한다.
- (3) $0 < x < 1$ 인 어떤 실수 x 에 대하여 $|x-1| < a$ 가 성립한다.



017.

명제

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 10 \geq p$ 이다.’

는 참이고, 명제

‘어떤 실수 x 에 대하여 $1 - x^2 \geq p$ 이다.’

는 거짓일 때, 정수 p 의 개수를 구하여라.¹⁷⁾

018.

다음 명제 중 참인 것을 있는 대로 고르면?¹⁸⁾ (단, x, y 는 실수)

- ① 어떤 x 와 모든 y 에 대하여 $x^2 + y^2 > 0$ 이다.
- ② 모든 x 와 모든 y 에 대하여 $x^2 + y^2 > 0$ 이다.
- ③ 어떤 x 와 모든 y 에 대하여 $x^2 < y^2 + 1$ 이다.
- ④ 모든 x 와 어떤 y 에 대하여 $x^2 \geq y^2 + 1$ 이다.
- ⑤ 모든 x 와 어떤 y 에 대하여 $x^2 > y^2 + 1$ 이다.



개념7

✓ 조건의 진리집합 : 벤다이어그램

019.

전체집합 U 에서 세 조건 p, q, r 의 진리집합이 각각 P, Q, R 일 때,

$$P \cup (Q \cap R) = P, \quad (P \cup Q) \cap R = R$$

가 성립한다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?19)

- ㄱ. p 는 r 이기 위한 필요조건이다.
- ㄴ. $(p$ 또는 $r)$ 은 q 이기 위한 필요조건이다.
- ㄷ. $(p$ 이고 $q)$ 는 $(q$ 이고 $r)$ 이기 위한 충분조건이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ



020.

세 조건 p, q, r 이

$$(\sim p \text{ 또는 } \sim q) \Rightarrow r, \sim p \Rightarrow \sim r$$

를 만족할 때, 다음 중 반드시 참인 조건을 모두 적은 것은?20)

- ① p ② q ③ r
- ④ p, q ⑤ p, q, r

021.

네 조건 p, q, r, s 의 진리집합을 각각 P, Q, R, S 라고 할 때, 다음과 같은 포함관계가 성립한다.

$$P \subset Q, (P^c \cap R) \subset Q, S \subset (P^c \cap Q^c)$$

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?21)

ㄱ. r 은 q 이기 위한 충분조건이다.
 ㄴ. $\sim q$ 는 s 이기 위한 필요조건이다.
 ㄷ. $(p \text{ 또는 } q)$ 는 $\sim s$ 이기 위한 필요조건이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



개념7

✓ 조건 : 포함관계를 잘 생각해보자.

022.

실수 x, y, z 에 대하여 $|xy| + |yz| + |zx| = 0$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?22)

- ① x, y, z 모두 0이다.
- ② x, y, z 중 적어도 한 개는 0이다.
- ③ x, y, z 중 적어도 한 개는 0이 아니다.
- ④ x, y, z 중 적어도 두 개는 0이다.
- ⑤ x, y, z 중 적어도 두 개는 0이 아니다.



023.

임의의 실수 a, b 에 대하여

$$||a|-|b||=|a-b|$$

가 성립하기 위한 필요충분조건은?23)

- ① $a = b = 0$ ② $a + b \geq 0$ ③ $a - b > 0$
- ④ $ab < 0$ ⑤ $ab \geq 0$

024.

다음 세 조건 p, q, r 가

$$p: x^2 + y^2 \leq 1$$

$$q: |x| + |y| \leq k$$

$$r: x^2 + y^2 \leq 4$$

일 때, p 는 q 이기 위한 충분조건이고, r 은 q 이기 위한 필요조건일 때, k 의 최댓값과 최솟값의 합은?24) (단, $k > 0$)

- ① 3 ② $2 + \sqrt{2}$ ③ $2 + 2\sqrt{2}$
- ④ 5 ⑤ $5 + \sqrt{2}$



개념8

✓ 산기 : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호는 $a=b$ 일 때)

025.

다음 물음에 답하여라.25)

(1) 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y=4$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 최댓값은?

(2) 두 양수 x, y 에 대하여 $9x+2y=16$ 일 때, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값은?

(3) $x > 5$ 일 때, $x + \frac{3}{x-5}$ 의 최솟값은?

(4) $x > -1$ 일 때, $4x+1 + \frac{4}{x+1}$ 의 최솟값은?

(5) 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+4}{x}$ 의 최솟값은?



026.

세 양수 x, y, z 에 대하여,

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{2x + y} + \frac{1}{y + 2z} \right)$$

의 최솟값을 구하고, 최솟값을 가질 때 x, y, z 사이의 관계를 구하여라.²⁶⁾

027.

양수 x, y 에 대하여 부등식

$$k\sqrt{x+y} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

가 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 구하여라.²⁷⁾



개념8

✓ 코슈 : $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ (등호는 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$)

028.

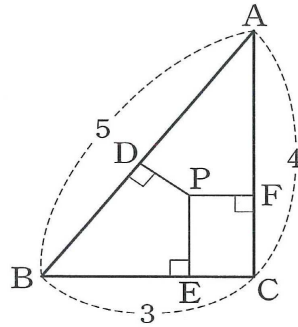
다음 물음에 답하여라.28)

- (1) $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ 를 만족하는 실수 a , b , c 에 대하여 c 의 최댓값은?
- (2) $x > 0$, $y > 0$, $5x + 2y = 10$ 일 때, $\sqrt{5x} + \sqrt{2y}$ 의 최댓값은?
- (3) 세 양수 x , y , z 에 대하여 $x + y + z = 6$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$ 의 최솟값을 구하여라.



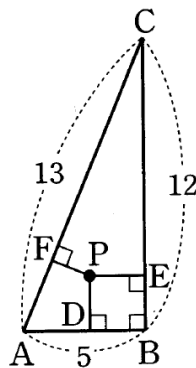
029.

그림과 같이 세변의 길이가 3, 4, 5인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 내부의 점 P에서 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라고 할 때, $\overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$ 의 최솟값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.²⁹⁾ (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)



030.

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=12$, $\overline{CA}=13$ 인 직각삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 할 때, $\frac{5}{PD} + \frac{12}{PE} + \frac{13}{PF}$ 의 최솟값을 구하여라.³⁰⁾



-
- 1) 21
2) ④
3) 31
4) ⑤
5) 10
6) 101
7) 4
8) ②
9) 10
10) ⑤
11) ③
12) ②
13) 55
14) 72
15) 11
16) (1) $a < 0$ (2) $a \geq 1$ (3) $a > 0$
17) 9
18) ①, ③
19) ①
20) ①
21) ③
22) ④
23) ⑤
24) ②
25) (1) $2\sqrt{2}$
 (2) 2
 (3) $5 + 2\sqrt{3}$
 (4) 5
 (5) 6
26) 2, $x = z$
27) $\sqrt{2}$
28) (1) 3
 (2) $2\sqrt{5}$
 (3) 6
29) 97
30) 15