[집합]

B01 | 집합과 원소

개념1 집합과 원소

① 집합 : 모임 (대상이 분명한) : A, B로 표현함

② 원소 : 집합에 포함되는 것들

✔ $a \in A$: a가 A의 원소이다.

✔ $a \notin A$: a가 A의 원소가 아니다.

개념2 공집합과 전체집합

① $\varnothing = \{\ \}$: 공집합 : 원소가 없는 집합

② U : 전체집합 : (고려하는 대상) 전체의 집합

✔ 벤다이어그램 : 집합을 그림으로 나타낸 그거

✔ 원소나열법과 조건제시법 : eg) $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{x | x$는 5 이하의 자연수$\}$

$\Rightarrow$ 조건제시법으로 주어진 집합은 원소나열법으로 나타내 보자.

B01E1 | 조건을 만족하는 집합

예제1 전체집합 $U=\{x|x$는 100 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을

모두 만족하는 U의 부분집합 A중에서 원소의 개수가 가장 적은 것은?

(가) $3 \in A$

(나) $m \in A,\ n \in A$이면 $m+n \in A$

예제2 다음 두 조건을 모두 만족하는 집합 A의 개수는?

(가) A는 공집합이 아니며 원소로 자연수만을 갖는다.

(나) $a \in A$이면 $\dfrac{16}{a} \in A$이다.

B02 | 집합의 연산

개념1 합집합, 교집합, 차집합, 여집합

① A와 B의 합집합 : $A \cup B=\{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$

② A와 B의 교집합 : $A \cap B=\{x|x \in A \text{ and } x \in B\}$

③ A와 B의 차집합 : $A-B=\{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$

④ A의 여집합 : $A^c=\{x|x \notin A\}$

개념2 서로소 : $A \cap B=\varnothing$이면 집합 A와 집합 B를 서로 서로소라 한다.

예제1 벤다이어그램을 통해 다음을 확인하여라.

(1) $A-B=A\cap B^c$

(2) $(A\cup B)\cap A=A$

(3) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

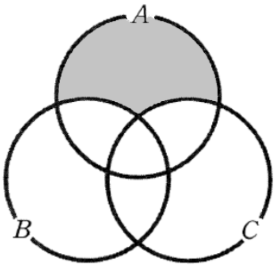
(4) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

(5) $(A^c)^c=A$

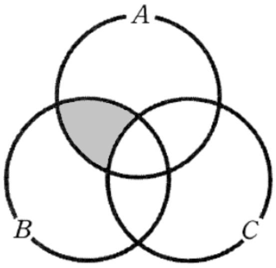
(6) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

예제2 다음의 영역을 집합의 연산을 이용하여 나타내어라.

(1)



(2)



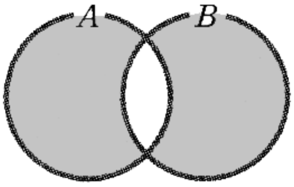
B02E1 | 대칭차집합

개념1 A와 B의 대칭차집합

$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(A-B)\cup(B-A)$

$=$(한 쪽에만 속한 원소들의 집합)



$A\triangle B$

예제1 다음을 벤다이어그램을 이용하여 나타내어라.

(1) $(A \triangle B) \triangle C$ (2) $(A-B) \triangle C$

예제2 다음을 간단히 하여라.

(1) $(A-B) \triangle B$ (2) $(A-B) \triangle A$

(3) $A \triangle A$ (4) $A \triangle A^c$

(5) $A \triangle \varnothing$ (6) $A \triangle U$

B03 | 원소의 개수

개념1 $n(A)$: 집합 A에 속한 원소의 개수

✓ 간단히 증명할 수 있는 성질

(1) $n(\varnothing)=0$

(2) $n(A^c)=n(U)-n(A)$

(3) $n(A-B)=n(A)-n(A \cap B)$

(4) $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$

(5) $n(A \cup B \cup C)=$

예제1 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(U)=50$, $n(A^c \cap B^c)=10$, $n(A)=22$, $n(B)=23$일 때, $n(A \cap B)$의 값을 구하여라.

예제2 세 집합 A, B, C에 대하여 $A \cap C = \varnothing$이고 $n(A)=10$, $n(B)=8$, $n(C)=6$, $n(A \cup B)=14$, $n(B \cup C)=10$일 때, $n(A \cup B \cup C)$의 값을 구하여라.

※ 세 집합에 관련하여 원소의 개수를 구할 때, "한 군데만 속하는 원소들", "두 군데 속하는 원소들", "세 군데 모두 속하는 원소들"의 수를 변수로 놓으면 좋을 때가 가끔 있다.

예제3 세 집합 A, B, C에 대하여 $n(A \cup B \cup C)=90$, $n(A \triangle B)=40$, $n(B \triangle C)=36$, $n(C \triangle A)=58$일 때, $n(A \cap B \cap C)$의 값을 구하여라.

예제4 놀이동산 입장객 100명을 대상으로 이용한 놀이기구에 대하여 조사하였다. 바이킹, 회전목마, 롤러코스터를 이용한 입장객은 각각 36명, 42명, 49명 이었고, 두 개의 놀이기구만 이용한 입장객은 29명, 세 개의 놀이기구를 모두 이용한 입장객은 15명이었다. 이때 적어도 한 개의 놀이기구를 이용한 입장객의 수를 구하여라.

B03E1 | 교집합의 최대최소

개념1 U의 두 부분집합 A, B에 대하여,

① $n(A\cap B)$의 최댓값은 $\min(n(A),\ n(B))$

② $n(A\cap B)$의 최솟값은 $n(A)+n(B)-n(U)$

※ 벤다이어그램을 그려서 이해해보자.

예제1 100명의 학생 중 커피를 좋아하는 학생이 55명, 도넛을 좋아하는 학생이 75명이다. 커피와 도넛을 모두 좋아하는 학생 수를 x라고 할 때, x의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

※ 집합이 세 개면 안쪽에서부터 정리해보자.

예제2 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여

$n(U)=50,\ n(A)=25,\ n(B)=34,\ n(C)=30,$

$n(A\cap B)=18,\ n(B\cap C)=22,\ n(C\cap A)=17$

일 때, $n(A\cap B\cap C)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

예제3 학생 110명이 국어, 영어, 수학 시험을 보는데, 국어를 합격한 사람은 92명, 영어를 합격한 사람은 75명, 수학을 합격한 사람은 63명이고, 국어와 영어를 모두 합격한 사람은 65명, 국어와 수학을 모두 합격한 사람은 54명, 영어와 수학을 모두 합격한 사람은 48명이다. 세 과목 모두 합격한 학생 수의 최솟값을 구하여라.

B04 | 집합의 포함관계

개념1 $A \subset B$: 모든 A의 원소는 B의 원소이다.

$\Leftrightarrow$ A는 B에 포함된다.

$\Leftrightarrow$ A는 B의 부분집합이다.

✓ $A \subset B$를 보이려면 'A의 원소이면 B의 원소이다.'를 증명하면 된다.

✓ $A = B$임을 보이려면 '$A \subset B$이고 $B \subset A$이다.'를 증명하면 된다.

예제1 다음을 확인해보자.

(1) $A - B \subset A$　　(2) $A \cap B \subset A$

(3) $A \subset U$　　(4) $\varnothing \subset A$

B04E1 | 집합을 원소로 가지는 집합

예제1 $A=\{1,\ \{1\}\}$이면,

(1) A의 원소는 2개 : $1\in A$, $\{1\}\in A$

(2) A의 부분집합은 4개 : $\varnothing\subset A$, $\{1\}\subset A$, $\{\{1\}\}\subset A$, $\{1,\ \{1\}\}\subset A$

예제2 $A=\{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$이면,

(1) A의 원소는 3개 :

(2) A의 부분집합은 8개 :

B04E2 | 집합의 포함관계와 같은 표현

개념1 조건 $A\subset B$은 다음과 동치이다.

① $A\cap B=A$ ② $A\cup B=B$

③ $A-B=\varnothing$ ④ $A\cap B^c=\varnothing$

⑤ $A^c\cup B=U$ ⑥ $A^c\supset B^c$

※ 필요충분임을 증명해보자.

$\Rightarrow$ 벤다이어그램에서 어느 부분이 공집합인지를 따져보면 좋다.

예제1 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$일 때, 다음 중 항상 성립하지 않는 것은?

① $A \cup B = B$　② $A \cap B = A$　③ $(A \cap B)^c = B^c$

④ $B^c \subset A^c$　⑤ $A - B = \varnothing$

예제2 두 집합 A, B에 대하여 $(A \cup B) \cap (B - A)^c = A \cup B$일 때, $A - B^c$을 간단히 하면?

① A　② B　③ $\varnothing$

④ U　⑤ $A - B$

B04E3 | 배수집합

개념1 d의 양의 배수들의 집합을 N_d라 하자.

$\Rightarrow N_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots\}$

$\Rightarrow N_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\}$

$$\left.\begin{array}{l} ✓\ N_2 \cap N_6 = \{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots\} = N_6 \\ N_4 \cap N_6 = \{12,\ 24,\ 36,\ 48,\ \cdots\} = N_{12} \end{array}\right\} \text{최소공배수}$$

$$\left.\begin{array}{l} ✓\ N_2 \cup N_6 = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ \cdots\} \subset N_1 \\ N_{12} \cup N_{18} = \{12,\ 18,\ 24,\ 36,\ 48,\ 54,\ \cdots\} \subset N_1,\ N_2,\ N_3,\ N_6 \end{array}\right\} \text{공약수}$$

B05 | 부분집합의 개수

개념1 $n(A)=N$이면 A의 부분집합의 개수는 2^N개다.

pf1) 각자 포함되거나 포함되지 않기 때문에,

pf2) 원소가 하나 들어오면 부분집합의 개수가 2배로 늘기 때문에

예제1 $X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$일 때, 다음을 만족하는 X의 개수를 구하여라.

(1) 그냥 X

(2) $2\in X$

(3) $3\not\in X$

(4) $2\in X,\ 3\not\in X$

(5) $\{1,\ 3,\ 5\}\subset X$

(6) $\{1,\ 2\}\cap X=\varnothing$

(7) $\{1,\ 2\}\cap X\neq\varnothing$

(8) $\{1,\ 2,\ 3\}\cap X\neq\varnothing$

B05E1 | 부분집합의 원소들의 합

예제1 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) U의 각 부분집합들에 속하는 원소의 합

(2) U의 각 부분집합들 중 1을 포함하지 않는 집합들에 속하는 원소의 합

(3) U의 각 부분집합들 중 1을 포함하는 집합들에 속하는 원소의 합

(4) U의 각 부분집합들 중 1과 2를 포함하는 집합들에 속하는 원소의 합

(5) U의 각 부분집합들 중 원소가 두 개짜리인 집합들에 속하는 원소의 합

[명제]

B06 | 명제와 조건

개념1 명제와 조건

① 명제 : 참, 거짓을 가릴 수 있는 문장이나 식 : p, q, r, $\cdots$로 나타낸다.

② 조건 : 미지수의 값이 주어지면 명제가 되는 문장이나 식 : $p(x)$, $q(x)$, $\cdots$

✓ 진리집합 : 조건이 참이 되게 하는 미지수들의 집합

eg) (1) $2+5>3$은 참인 명제이다.

(2) $2+5=3$은 거짓인 명제이다.

(3) 조건 $p(x): 2x+3=11$에 대하여 $p(3)$은 거짓, $p(4)$는 참이다.

(4) 조건 $x^2-2x-8=0$의 진리집합은 $\{-2, 4\}$이다.

(5) 조건 $3x+1<7$의 진리집합은 $\{x \mid x<2\}$이다.

B07 | 명제의 부정

개념1 p의 부정 : $\sim p$; "p가 아니다."

$\Rightarrow$ 두 명제 p와 $\sim p$의 진릿값은 반대이며, (하나가 참이고 다른 것은 거짓)

두 조건 $p(x)$와 $\sim p(x)$의 진리집합은 서로 여집합이 된다.

※ 일반적으로 부정을 간단히 'p가 아니다.'라고 표현하지만 실제로는 진리값을 정확하게 반대로 뒤집어 줘야하기 때문에 어려운 문제일 수 있다.

개념2 명제의 부정

① '작다($<$)'의 부정은 '크거나 같다($\geq$)'가 된다.

② '그리고(and)'의 부정은 '또는(or)'이 된다.

③ '모든(all)'의 부정은 '어떤(some)'이 된다.

※ '어떤'이란 단어는 여러 방법으로 표현할 수 있으니 참고하자.

'세 명 모두 잘생겼다.'를 부정하면
- 세 명 중 어떤 사람은 못생겼다.
- 세 명 중 못생긴 사람이 존재한다.
- 세 명 중 적어도 한 명은 못생겼다.

※ 복합명제는 기본적으로 '모든'을 포함하고 있으므로 부정할 때 주의하도록 한다.

'정수는 유리수이다.'를 부정하면
- 정수는 유리수가 아니다. (X)
- 어떤 정수는 유리수가 아니다. (O)
- 유리수가 아닌 정수가 존재한다. (O)

✔ 'p이면 q이다.'의 부정은 '어떤 p는 $\sim q$이다.' ($P-Q \neq \varnothing$이어야 하므로)

✔ '어떤 p는 q이다.'의 부정은 '(모든) p는 $\sim q$이다.'

※ 우리나라 말 자체가 가끔 중의가 돼서 헷갈릴 때가 있다.

eg) a, b, c는 모두 유리수가 아니다.

$\Rightarrow$ a, b, c 중 유리수는 없다. / a, b, c 중 유리수가 아닌 것이 있다.

예제1 다음 명제/조건을 부정하여라.

(1) $x^2-2x-8=0$

(2) $3x+1<7$

(3) 모든 실수 x에 대하여 $x^2>x$이다.

(4) 임의의 실수 x에 대하여 $x>0$ 또는 $x<0$이다.

B08 | 복합명제

개념1 두 조건 p, q에 대하여 'p이면 q이다.'와 같은 명제를 복합명제라 하고 $p \rightarrow q$로 나타낸다. 이때, p를 가정, q를 결론이라 한다.

개념2 두 조건 p, q의 진리집합이 각각 P, Q일 때, $p \rightarrow q$가 참이 되려면 $P \subset Q$여야 한다. $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타낸다.

예제1 다음 복합명제의 참 거짓을 설명할 수 있는 두 진리집합을 말하여라.

(1) 사람은 죽는다.

(2) $x=1$이면 $x^2=1$이다.

(3) $x>2$이면 $x>3$이다.

B08E1 | 역과 대우

개념1 복합명제 $p \to q$에 대하여

① $q \to p$를 명제의 역이라 한다.

② $\sim q \to \sim p$를 명제의 대우라 한다.

개념2 한 복합명제와 그 대우명제의 진릿값은 같다. (서로 같은 말이 된다.)

$\Rightarrow$ 증명이 안 될 때, 대우를 생각해보면 행복해질 수도 있다.

예제1 'n^2이 홀수이면 n이 홀수이다.'를 증명하여라.

B08E2 | 반례

개념1 복합명제 $p \to q$가 참이려면 $P \subset Q$여야 하므로

$p \to q$가 거짓임을 보이려면 $P \subset Q$가 아님을 보여야 한다.

즉, $P-Q$에 원소가 있음을 보여야 한다. 이 원소를 $p \to q$의 반례라 한다.

eg) '수학선생님들은 잘생겼다.'가 거짓임을 보이려면

'못생긴 수학선생'을 데려와야 한다.

예제1 명제 $\sim p \to q$의 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$　② $P \cup Q$　③ $P-Q$

④ $Q-P$　⑤ $(P \cup Q)^c$

B09 | 삼단논법

개념1 두 명제 $p \to q$와 $q \to r$가 참이면 $p \to r$가 참이다.

pf) $P \subset Q$, $Q \subset R$이면 $P \subset R$이므로.

eg) '소크라테스는 사람이다.'와 '사람은 죽는다.'에서

예제1 두 명제 $\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim q$가 참일 때 다음 중 참이라 할 수 없는 명제는?

① $\sim q \rightarrow p$ ② $q \rightarrow \sim r$ ③ $\sim p \rightarrow \sim r$

④ $r \rightarrow p$ ⑤ $q \rightarrow \sim p$

예제2 두 명제 『날씨가 춥지 않으면 제비가 돌아온다.』, 『봄이 오면 꽃이 핀다.』가 참일 때, 이 두 명제로부터 명제 『봄이 오면 제비가 돌아온다.』가 참이라는 결론을 얻기 위해서 필요한 명제를 말하여라.

B10 | 필요조건과 충분조건

개념1 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때,

① 조건 p를 q이기 위한 충분조건이라 한다.

② 조건 q를 p이기 위한 필요조건이라 한다.

eg) '수학선생님들은 잘생겼다.'에서 필요조건과 충분조건을 말하면?

개념2 명제 $p \rightarrow q$와 $q \rightarrow p$가 모두 참일 때,

두 조건 p와 q를 서로 필요충분조건, 혹은 동치라 한다.

예제1 다음 두 조건이 서로 어떤 관계인지 말하여라.

(1) $p : x^2 = 1,\quad q : x = 1$

(2) $p : ab = 0,\quad q : a^2 + b^2 = 0$

B11 | 절대부등식의 증명

개념1 실수는 수직선상의 점들과 1-1 대응된다.

$\Rightarrow$ 모든 실수는 크기 비교가 가능하다.

✓ 부등식의 성질 고찰

① $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

② $a < b \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \ (c > 0) \\ ac = bc \ (c = 0) \\ ac > bc \ (c < 0) \end{cases}$

③ $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$?

④ $a < b \Rightarrow a^3 < b^3$?

⑤ $a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$?

예제1 $\sqrt{2} + 1$과 $\sqrt{5}$의 크기를 비교하여라.

예제2 $a > b > 0$인 두 실수에 대하여 $\sqrt{a - b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$임을 증명하여라.

예제3 두 실수 a, b에 대하여 $|a|+|b| \geq |a+b|$임을 증명하여라.

예제4 a, b, x, y가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$을 증명하여라.

B11E1 | 기타 절대부등식

개념1 삼각부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$

$\Rightarrow$ $b=-a+b$를 취하면 $|b|-|a| \leq |b-a|$

개념2 인수분해와 절대부등식 :

① $a^2+ab+b^2 \geq 0 \Rightarrow a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$

② $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$

B12 | 일차부등식의 특수해

개념1 일차부등식 $ax<b$의 근 $\Rightarrow$ $\begin{cases} x<\dfrac{b}{a} \ (a>0) \\ x>\dfrac{b}{a} \ (a<0) \\ \begin{cases} \text{실수전체} \ (a=0,\ 0<b) \\ \text{근이 없다.} \ (a=0,\ 0 \geq b) \end{cases} \end{cases}$

✓ 일차부등식의 근이 '없다.'거나 '모든 실수'이면 일차항의 계수가 0이다.

예제1 $(a-1)(a+1)x<a$의 근이 존재하지 않게 되는 a의 값을 구하여라.

예제2 모든 실수 x에 대하여 $(t^2-2t-3)x \geq t+1$이 성립할 때, t의 값을 구하여라.

B13 | 이차부등식의 특수해

개념1 안특수해 $\begin{cases} (x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta \\ (x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha \text{ 또는 } \beta<x \end{cases}$

개념2 특수해 : $D \leq 0$일 때

① $ax^2+bx+c=0$의 D : 근의 개수 판별

② $y=ax^2+bx+c$의 x절편 $\Leftrightarrow$ $ax^2+bx+c=0$의 근

③ $D>0$, $D=0$, $D<0$일 때의 $y=ax^2+bx+c$의 개형?

④ 그에 따른 부등식의 근?

B14 | 산술평균과 기하평균

개념1 두 양수 a, b에 대하여 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$가 항상 성립한다.

(등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

※ $\frac{a+b}{2}$를 두 수의 산술평균, $\sqrt{ab}$를 두 수의 기하평균이라 한다.

※ 거의 쓰이지 않는 식 : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$

※ 교과과정을 넘어서지만 봐둬야 하는 식 : $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 양수 a, b에 대하여 $a+b=10$일 때, ab의 최댓값을 구하여라.

(2) 두 양수 a, b에 대하여 $ab=18$일 때, $2a+b$의 최솟값을 구하여라.

(3) 두 양수 x, y에 대하여 $x+y=4$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 최댓값을 구하여라.

(4) 두 양수 a, b가 $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{4}=1$을 만족할 때, $\frac{18}{ab}$의 최솟값을 구하여라.

(5) $a>0$, $b>0$일 때, $\left(2a+\frac{1}{b}\right)\left(2b+\frac{1}{a}\right)$의 최솟값을 구하여라.

(6) 양수 x에 대하여 $4x+\frac{9}{x}$의 최솟값을 구하여라.

(7) $x>-1$일 때, $x+\frac{9}{x+1}$의 최솟값과 그때의 x값을 구하여라.

(8) $a>\frac{1}{2}$일 때, $(a-1)+\frac{2}{2a-1}$의 최솟값과 그때의 a값을 구하여라.

(9) 두 양수 x, y에 대하여 $9x+2y=16$일 때, $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$의 최솟값을 구하여라.

(10) $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

(11) 양수 a, b, c에 대하여 $(a+3b+4c)\left(\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

(12) $x>0$, $y>0$, $z>0$일 때, $(x+y+z)\left(\frac{1}{2x+y}+\frac{1}{y+2z}\right)$의 최솟값을 구하여라.

B15 | 코쉬슈바르츠 부등식

개념1 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$가 항상 성립한다.

(등호는 $ay-bx=0$일 때 성립한다. ⇒ 대충 : $\frac{b}{a}=\frac{y}{x}$ or $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$)

※ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$

※ $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

① 두개짜리 증명 : 전개 후 한쪽 변으로 이항.

② n개짜리 증명 : 이차식 $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2$을 이용해서.

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) $a^2+b^2=5$이고 $x^2+y^2=45$일 때, $ax+by$의 최댓값을 구하여라.

(2) $x^2+y^2=20$일 때, $2x+4y$의 최솟값을 구하여라.

(3) 실수 x에 대하여 $2x+3y=13$일 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하여라.

(4) 실수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2=1$이다. $2a+3b+6c$의 최댓값을 구하여라.

(5) 실수 x, y, z에 대하여 $4x+y+3z=12$일 때, $4x^2+y^2+9z^2$의 최솟값을 구하여라.

(6) 양수 x, y, z가 $x+y+z=26$일 때, $\sqrt{x}+3\sqrt{y}+4\sqrt{z}$의 최댓값을 구하여라.

(7) 두 양수 x, y에 대하여 $3x+2y=16$일 때, $\sqrt{3x}+\sqrt{2y}$의 최댓값을 구하여라.

(8) 세 양수 x, y, z에 대하여 $x+y+z=6$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$의 최솟값을 구하여라.