원포인트 개념주입 C

적분

개념1

✏ 정적분의 연산 : $F'(x) = f(x)$이면, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

001.

함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} -3x+4 & (x \le 0) \\ 4 & (x > 0) \end{cases}$$

일 때, $\int_1^3 xf(x-2)dx$의 값을 구하여라.1)

002.

$0 \le a \le 4$인 실수 a에 대하여, 정적분 $\int_0^4 |x-a|dx$의 최솟값을 구하여라.2)

003.

모든 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)f(x)dx=0$$

을 만족시킬 때, 두 실수 a, b의 합 $a+b$의 값은?3)

① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ $-\frac{1}{4}$

④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

개념2

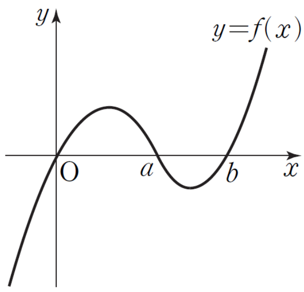
✏ 정적분으로 정의된 함수와 미분 : $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$

004.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 두 함수,

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \quad G(x)=\int_0^x |f(t)|\,dt$$

가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 구간 $[0,\ b]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?4)



(가) 구간 $[0,\ b]$에서 함수 $y=F(x)$의 최댓값은 3이다.
(나) 구간 $[0,\ b]$에서 함수 $y=G(x)-F(x)$의 최댓값은 4이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

005.

다항함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족한다.

(가) $f(1)=25$

(나) $f(x)=\frac{1}{2}\int_{x}^{x+1} f(t)dt-\frac{1}{2}\int_{x}^{x-1} f(t)dt-\int_{0}^{1} f(t)dt$

(다) 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)+f(x-y)=2\{f(x)+f(y)\}$$

이다.

이때, $f'(1)$의 값을 구하여라.5)

006.

삼차함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, $c(a<b<c)$에 대하여 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f(a)=f(b)=f(c)=0$

(나) $\int_{a}^{b} f(x)dx<\int_{c}^{b} f(x)dx<0$

다음 중 정적분 $F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$의 값이 최대가 되도록 하는 x의 값은?6)

① a ② b ③ c

④ $\frac{a+b}{2}$ ⑤ $\frac{b+c}{2}$

개념3

✏ 정적분과 항등식 : 종류별로 잘 풀어라.

007.

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$\int_x^2 (x-t)f(t)dt = x^3 - 3x^2 + 4$$

를 만족시킬 때, $f(-1)$의 값을 구하여라.[7)]

008.

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=x^2+\int_0^1 g(t)dt$, $g(x)=2x^2-\int_0^1 f(t)dt$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프에 동시에 접하는 직선의 기울기를 m이라 할 때, m^2의 값은?[8)]

① $\frac{10}{3}$　② 4　③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{16}{3}$　⑤ 6

009.

다음 식을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 계수들의 합은?[9)]

$$f(f(x))=\int_0^x f(t)dt-x^2+3x+3$$

① 3　② 2　③ 1

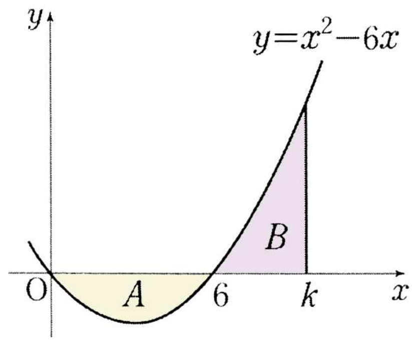
④ 0　⑤ -1

✔ 넓이 : 적분하면 돼.

개념4

010.

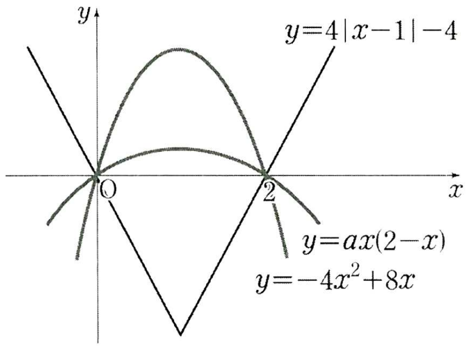
다음 그림과 같이 곡선 $y=x^2-6x$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A, 이 곡선과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역의 넓이를 B라 하자. $A=2B$가 성립할 때, 상수 k의 값은?10) (단, $k>6$)



① $3+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{3}$ ③ 7
④ $3+4\sqrt{3}$ ⑤ 8

011.

두 함수 $y=-4x^2+8x$ 와 $y=4|x-1|-4$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=ax(2-x)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?[11] (단, $0<a<1$)

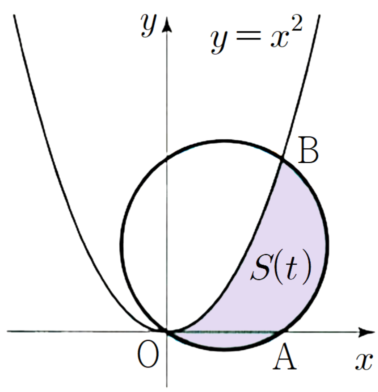


① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

012.

그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(t,\ 0)$, B$(t,\ t^2)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\frac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하여라.[12] (단, p, q는 정수이다.)

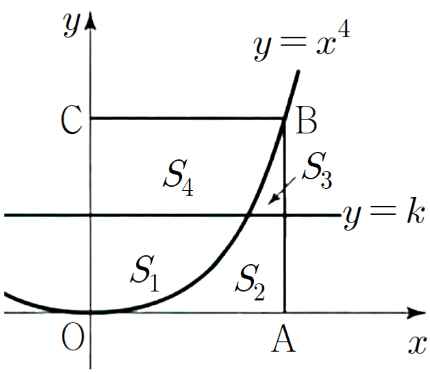


✔ 잘린 부분의 넓이 : 나눠서 적분하면 돼.

개념5

013.

좌표평면 위에 네 점 O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. 곡선 $y=x^4$과 직선 $y=k(0<k<1)$에 의하여 정사각형 OABC를 네 영역으로 나눌 때, 다음 그림과 같이 네 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라 하자. 이때, $|S_1-S_3|+|S_2-S_4|$의 최솟값은?13)

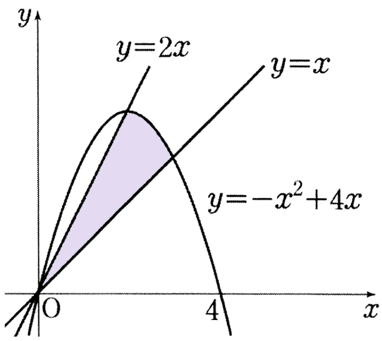


① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

014.

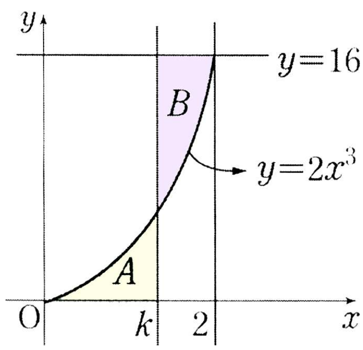
그림과 같이 포물선 $y=-x^2+4x$와 두 직선 $y=2x$, $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?[14)]



① $\frac{13}{6}$　② $\frac{8}{3}$　③ $\frac{19}{6}$
④ $\frac{11}{3}$　⑤ $\frac{25}{6}$

015.

그림과 같이 곡선 $y=2x^3(0 \le x \le 2)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=16$으로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?[15)] (단, $0<k<2$)



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{3}{2}$

개념6

✔ 이차함수와 넓이 : $\left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$

※ 삼차함수와 넓이 : $\left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right|$

016.

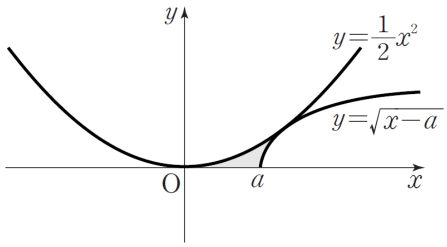
이차함수 $y=x^2$ 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=l$로 일정할 때, 이 곡선과 직선 PQ로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하자. S의 최댓값을 l을 이용하여 나타낸 것은?16)

① $\frac{l^3}{2}$ ② $\frac{l^3}{3}$ ③ $\frac{l^3}{4}$

④ $\frac{l^3}{5}$ ⑤ $\frac{l^3}{6}$

017.

그림과 같이 두 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\sqrt{x-a}$는 한 점에서 만나고, 그 점에서의 접선의 기울기가 같다. 두 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?[17] (단, a는 양수이다.)



① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

018.

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ a^3)$에서의 접선이 이 곡선과 점 B에서 만나고, 점 B에서의 접선은 이 곡선과 점 C에서 만난다고 하자. 선분 BC와 이 곡선 사이의 넓이를 선분 AB와 이 곡선 사이의 넓이로 나눈 값은?[18] (단, $a \neq 0$)

① 4 ② 8 ③ 16

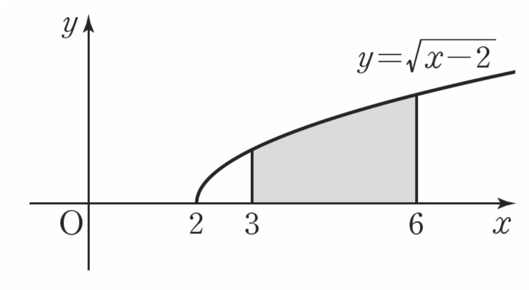
④ 32 ⑤ 64

개념7

✏ 역함수와 넓이 : y축쪽에서 보고

019.

곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 와 두 직선 $x=3$, $x=6$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?[19)]



① $\frac{11}{3}$　② 4　③ $\frac{13}{3}$

④ $\frac{14}{3}$　⑤ 5

020.

구간 $[1,\ 4]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 역함수 $g(x)$가 존재하고, 다음 조건을 모두 만족시킨다. 이때, $\int_1^4 f(x)dx$의 값은?[20)]

(가) $0 < f(1) < f(4)$
(나) $4f(4) - f(1) = 20$
(다) $\int_1^4 f(x)dx = \int_{f(1)}^{f(4)} g(y)dy$

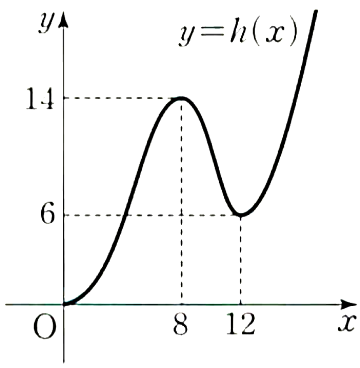
① 5　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 15

021.

$x \ge 0$에서 정의된 삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=0$이고, $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt \ (x \ge 0)$$

라 하면 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다. 함수 $h(x)$가 $x=8$일 때 극댓값 14를 갖고, $x=12$일 때 극솟값 6을 갖는다고 한다. 이때, 정적분 $\int_0^{12} g(t)dt$의 값을 구하여라.[21)]



개념8

✏ 대칭, 주기함수의 적분 : 적당히 잘.

022.

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=-2x^2+2(-1 \le x \le 1)$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$

이때, $\int_{-k}^{k} f(x)dx=80$인 실수 k의 값을 구하여라.[22)]

023.

함수 $f(x)$가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고,

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = a, \quad \int_{1}^{4} f(x)dx = b$$

일 때, 다음 보기 중 $\int_{1}^{2} f(x)dx$를 a, b로 바르게 나타낸 것은?23) (단, a, b는 상수)

① $\frac{-a-b}{2}$ ② $\frac{b-a}{2}$ ③ $\frac{a-b}{2}$

④ $\frac{a}{2}+b$ ⑤ $a+\frac{b}{2}$

024.

$-1 \le x \le 0$에서 $f(x)=x+1$이며, 모든 실수 x에 대하여 두 등식

$$f(x)=f(-x), \quad f(x)=f(x+2)$$

을 만족시킬 때, $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ 의 값은?24)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

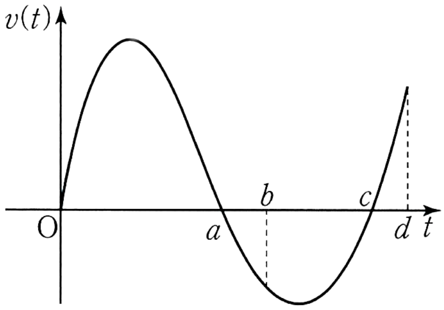
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

개념9

✏ 속력과 이동거리 :
① 속도의 크기가 속력이다.
② 속력을 적분하면 이동거리이다.

025.

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다. $\int_0^a |v(t)|dt = \int_a^d |v(t)|dt$일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?25)



ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 원점을 다시 지난다.
ㄴ. $\int_0^c v(t)dt = \int_c^d v(t)dt$
ㄷ. $\int_0^b v(t)dt = \int_b^d |v(t)|dt$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

026.

수직선 위의 원점을 출발하여 10초 동안 움직이는 점 P가 있다. 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때, $v(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $v(t)=\begin{cases}-|t-1|+1 & (0 \le t < 2) \\ |t-3|-1 & (2 \le t \le 4)\end{cases}$

(나) $v(t-2)=v(t+2)$ $(2 \le t \le 8)$

$f(x)=\int_0^x v(t)dt$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[26)]

ㄱ. $f(4)=2$

ㄴ. $f(10)=f(2)$

ㄷ. 점 P가 원점을 출발한 후 10초 동안 움직이면서 원점을 5번 더 지난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

027.

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases}4t & (0 \le t < 1) \\ -2t+6 & (1 \le t < 3) \\ t-3 & (3 \le t \le 5)\end{cases}$$

$0<x<3$인 실수 x에 대하여 점 P가
시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,
시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리
중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[27)]

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

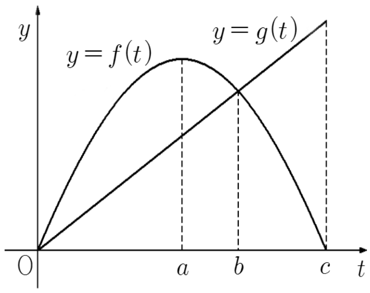
개념10

✏ 점 두 개가 움직이면 속도차이에 주목해본다.

028.

같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 t에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.

$\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$일 때, 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[28]

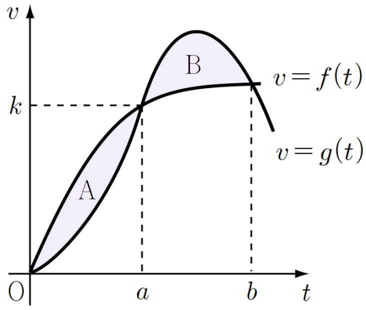


ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

029.

원점에서 출발한 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도 v가 각각 $f(t)$, $g(t)$이다. 그림과 같이 두 곡선 $v=f(t)$, $v=g(t)$로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이가 각각 S_1, S_2일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?[29)]



ㄱ. $S_1=S_2$이면 두 점 P, Q는 $t=b$일 때 만난다.
ㄴ. $S_1>S_2$이면 $\int_0^b f(t)dt>\int_0^b g(t)dt$이다.
ㄷ. $S_1<S_2$이면 $\int_0^c \{f(t)-g(t)\}dt=0$인 c가 존재한다.

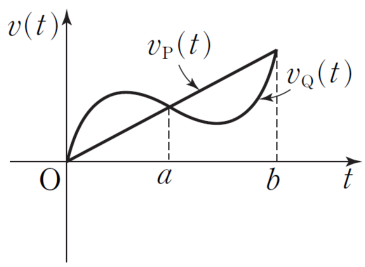
① ㄴ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

030.

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(0\le t\le b)$에서의 속도를 각각 $v_{\mathrm{P}}(t)$, $v_{\mathrm{Q}}(t)$라 할 때, 두 속도를 나타내는 그래프가 그림과 같다.

$$\int_0^b \{v_{\mathrm{P}}(t)-v_{\mathrm{Q}}(t)\}dt=0$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[30)]



ㄱ. $t=b$일 때, 두 점 P, Q의 위치는 같다.
ㄴ. $t=a$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는 가장 멀다.
ㄷ. $0<t<b$에서 두 점 P, Q는 만난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) 18
2) 4
3) ④
4) ⑤
5) 50
6) ①
7) 12
8) ④
9) ①
10) ②
11) ⑤
12) 13
13) ③
14) ③
15) ⑤
16) ⑤
17) ②
18) ③
19) ④
20) ③
21) 69
22) 30
23) ②
24) ③
25) ④
26) ②
27) ①
28) ⑤
29) ⑤
30) ③