[부정적분]

B22 | 다항함수의 부정적분

개념1 부정적분은 미분의 역산이다.

eg) $x^3+2x^2 \underset{\text{부정적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}} 3x^2+4x$

개념2 적분상수

x^3, x^3+1, x^3+2는 모두 미분하면 $3x^2$이다. $\Rightarrow$ $3x^2$을 적분하면 x^3+C이다.

Note $F'(x)=f(x)$이면 $\int f(x)dx=F(x)+C$

예제1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (6x^2-6x+2)dx$ (2) $\int (3x^2-4x)dx$

(3) $\int (x^2-x+1)dx$ (4) $\int (y^2+y)dy$

(5) $\int xy\,dy$ (6) $\int dx$

✓ 기호의 문제점 :

eg1) $y=x^2$일 때, $\int xy\,dy$를 구하면?

eg2) $f(0)=1$, $g(0)=0$, $f(x)=\int xdx$, $g(x)=\int xdx$

B23 | 부정적분의 성질

개념1 다음이 성립한다.

① $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

② $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

예제1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{x^2}{x-1}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$

(2) $\int (\sin\theta + \cos\theta)^2 d\theta - 2\int \sin\theta\cos\theta d\theta$

B24 | 도함수와 원함수

✓ $\int f'(x)dx \neq \left(\int f(x)dx\right)'$

✓ $\int f(x)dx \neq \int f(y)dy$ cf) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$

개념1 $f'(x)$와 $f(a)=b$ 하나를 알면 $f(x)$를 구할 수 있다.

eg) $f'(x)=6x^2-6x$이고 $f(1)=5$이다. $f(x)$를 구하여라.

예제1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 4)$를 지나고, 임의의 a에 대하여 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 $3a^2+1$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.

B24E1 | 부정적분을 포함한 항등식

개념1 대체로 양 변 미분하면 된다.

$\Rightarrow$ 가끔 차수부터 조사해야 되는 문제 주의.

예제1 다음을 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $F(x)=xf(x)+x^3+x^2$, $f(0)=0$

(2) $xf(x)=\int f(x)dx+2x^3-x^2-1$, $f(1)=2$

(3) $f'(x)+F(x)=x^3+x^2-6x-1$

(4) $F(x)=f(f(x))+2x^2-2x$

[정적분]

B25 | 정적분의 기본정리

개념1 정적분 : $\int_a^b f(x)dx$

$f(x)>0$일 때, $\int_a^b f(x)dx$는 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, x축으로

둘러싸인 도형의 넓이이다.

※ $f(x)<0$일 때는 넓이에 $-$를 붙인다.

※ a를 아래끝, b를 위끝, $f(x)$를 피적분함수라 한다.

예제1 다음의 의미를 나타내고 값을 구하여라.

(1) $\int_2^4 xdx$　　(2) $\int_{-1}^2 |x|dx$

(3) $\int_0^6 (x-2)dx$　　(4) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

개념2 미적분학의 기본정리 : $F'(x)=f(x)$이면,

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

증명 직관적으로, $S'(x)=f(x)$임을 확인하여라.

예제2 다음의 의미를 나타내고 값을 구하여라.

(1) $\int_2^4 xdx$　　(2) $\int_0^6 (x-2)dx$

예제3 다음 도형의 넓이를 구하여라.

(1) 곡선 $y=x^2$과 x축, $x=1$로 둘러싸인 도형

(2) 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형

(3) 곡선 $y=(x-1)^2$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형

B25E1 | 정적분의 성질

개념1 정적분의 성질

① $\int_a^a f(x)dx=0$

② $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

③ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (※ $a<b<c$인 경우?)

④ $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$ (※ $cf(x)$의 그래프?)

⑤ $\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$ (※ $f(x)\pm g(x)$의 그래프?)

증명1 '넓이'에 의한 의미적 증명

증명2 정적분의 기본정리에 의한 대수적 증명

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\int_0^6 |x-2|dx$

(2) $\int_0^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx + \int_3^1 f(x)dx$

(3) $\int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\int_0^1 (\sin x + \cos x)^2 dx - 2\int_0^1 \sin x \cos x dx$

(5) $\int_0^2 (x+(x-1)^5)dx$

B26 | 정적분으로 정의된 함수

개념1 $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$

$\Rightarrow$ $\int_a^x f(t)dt$를 x에 대하여 미분하면 $f(x)$이다. 즉, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$이다.

※ $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(y)dy = \int_a^x f(\alpha)d\alpha = \cdots$

예제1 다음을 x에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_a^x f(t)dt$ (2) $\int_a^{2x} f(t)dt$ (3) $\int_a^b f(t)dt$

(4) $\int_a^{x^2} f(t)dt$ (5) $\int_x^a f(t)dt$ (6) $\int_x^{x^2} f(t)dt$

(7) $\int_a^x tf(t)dt$ (8) $\int_a^x xf(t)dt$ (9) $\int_a^x (x-t)f(t)dt$

개념2 $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 이면

① $g(a)=0$ ② $g'(x)=f(x)$

예제2 $f(x)=x^2-2x$ 일 때, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 의 그래프를 그려라.

B26E1 | 정적분과 극한값

개념1 $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

예제1 $f(x)=x^2+x$ 일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_3^x f(t)dt$ (2) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\int_9^{x^2} f(t)dt$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^3-1}\int_5^{2x+3} f(t)dt$ (4) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x tf(t)dt$

(5) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_2^{2+h} f(t)dt$ (6) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h} f(t)dt$

(7) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{4-h}^{4+2h} f(t)dt$ (8) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_1^{1+h^2} f(t)dt$

B26E2 | 정적분이 포함된 항등식

개념1 등식에 $\int_a^b f(t)dt$가 있으면 $\int_a^b f(t)dt = k$라 놓고 "이 식을 푼다."

개념2 등식에 $\int_a^x f(t)dt$가 있으면

① $x = a$를 대입한다. ② 양 변을 각각 미분한다.

※ 가끔 차수부터 조사해야 되는 문제도 있다.

예제1 다음을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f(x) = 2x + \int_1^3 f(t)dt$

(2) $f(x) = x + \int_0^1 tf(t)dt$

(3) $f(x) = \frac{12}{7}x^2 - 2x\int_1^2 f(t)dt + \left(\int_1^2 f(t)dt\right)^2$

(4) $f(x) = 2x^2 - 4x\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 tf(t)dt$

예제2 다음을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2ax^2 + ax$

(2) $\int_2^x f(t)dt = x^2 + 2x + a$

(3) $\int_1^x xf(t)dt = 2x^3 + ax^2 + b + \int_1^x tf(t)dt$

B26E3 | 도함수의 넓이와 원함수의 차이

개념1 도함수의 넓이는 원함수의 차이이다.

즉, $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$이다.

예제1 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = \begin{cases} x+2 & (x \le 0) \\ 2 & (x > 0) \end{cases}$, $f(-2) = 4$일 때,

$f(2)$의 값을 구하여라.

예제2 함수 $f(x) = x^2 - 2x$에 대하여 x에 대한 방정식 $\int_a^x f(t)dt = 0$의

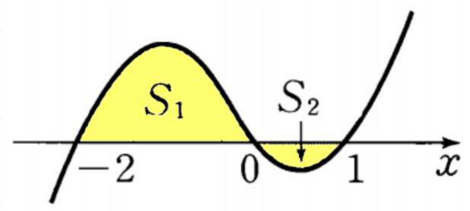
서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 a의 값을 모두 구하여라.

[정적분의 활용]

B27 | 정적분과 넓이

개념1 $x=a$, $x=b$, x축과 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\int_a^b |f(x)|dx$이다.

✓ 그림과 같은 함수 $f(x)$에 대하여 'x축과 $y=f(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이'는.



S_1+S_2

$=\left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right|$

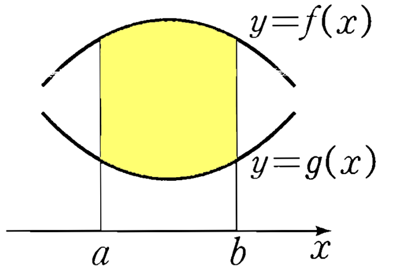
$=\int_{-2}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{1} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{1} |f(x)|dx$

※ $\int_{-2}^{1} f(x)dx$의 값은 S_1-S_2이다. 도움이 안 됨.

B27E1 | 두 함수 사이의 넓이

개념1 두 곡선 사이의 넓이



$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

※ 두 함수의 그래프를 그려서

어느 쪽이 위에 놓이는지 판단해야 한다.

예제1 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+8$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

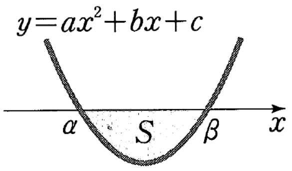
예제2 두 곡선 $y=x^3$과 $y=-x^2+2x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합을 구하여라.

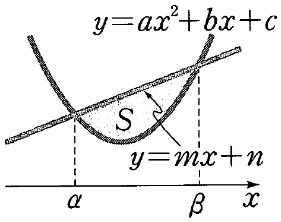
✓ 차함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 카발리에리의 원리

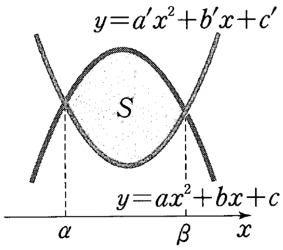
B27E2 | 이차함수로 둘러싸인 부분의 넓이

개념1 곡선 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|$이다.

✓ 이차함수와 직선으로 둘러싸인 부분일 때도 사용 가능하다.







$\left\|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right\|$	$\left\|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right\|$	$\left\|\frac{a-a'}{6}(\beta-\alpha)^3\right\|$

예제1 다음의 넓이를 구하여라.

(1) 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+8$로 둘러싸인 도형

(2) 두 포물선 $y=2x^2-7x+5$, $y=-x^2+5x-4$로 둘러싸인 도형

예제2 두 함수 $y=x^2-m$, $y=m-x^2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{8}{3}$일 때, 양수 m의 값을 구하여라.

예제3 두 함수 $y=x^2-x$와 $y=mx+2$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되는 m의 값을 구하여라.

개념2 꼭짓점에서부터 만든 직사각형과 $2:1$

개념3 삼차함수가 x축과 접할 때 : $\left|\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4\right|$

예제4 다음의 넓이를 구하여라.

(1) 곡선 $y=2x^2$과 x축, $x=3$으로 둘러싸인 도형

(2) 곡선 $y=\sqrt{9-x}$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형

(3) 곡선 $y=x^3$과 곡선 위의 점 $(2, 8)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형

B28 | 구간을 나누어 적분하기

개념1 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

예제1 $\int_0^3 |x^2-2x|dx$의 값을 구하여라.

예제2 $f(x)=\begin{cases}2x & (x\le 1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$일 때, $\int_0^3 xf(x)dx$의 값을 구하여라.

✓ 평행이동과 치환정적분

예제3 $f(x)=\begin{cases}2x & (x\le 1)\\ 2 & (x>1)\end{cases}$일 때, $\int_0^3 f(x-1)dx$의 값을 구하여라.

B28E1 | 기함수와 우함수의 정적분

개념1 우함수 $\Leftrightarrow$ $f(-x)=f(x)$ $\Leftrightarrow$ y축 대칭 $\Leftrightarrow$ 짝수차만

$\Rightarrow$ $f(x)$가 우함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$이다.

개념1 기함수 $\Leftrightarrow$ $f(-x)=-f(x)$ $\Leftrightarrow$ 원점 대칭 $\Leftrightarrow$ 홀수차만

$\Rightarrow$ $f(x)$가 기함수이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$이다.

증명 ① 그래프 상의 의미 ② 차수에 의해서 ③ 대수적 증명

예제1 $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x^5+4x^3+x^2-2x+1)dx$의 값을 구하여라.

예제2 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다.

$\displaystyle\int_{0}^{2}f(x)dx=4$일 때, $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+3)f(x)dx$의 값을 구하여라.

B28E2 | 주기함수와 대칭함수의 정적분

개념1 주기가 a인 주기함수 $\Leftrightarrow f(x)=f(x+a)$

$$\Rightarrow \int_{0}^{a}f(x)dx=\int_{a}^{2a}f(x)dx=\cdots=\int_{p}^{a+p}f(x)dx$$

개념2 $x=a$에 대칭인 함수 $\Leftrightarrow f(a-x)=f(a+x) \Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$

$$\Rightarrow \int_{a}^{a+p}f(x)dx=\int_{a-p}^{a}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{a-p}^{a+p}f(x)dx$$

B28E3 | 역함수의 적분

개념1 역함수 : $y=f(x)$의 역함수가 $y=g(x)$이면

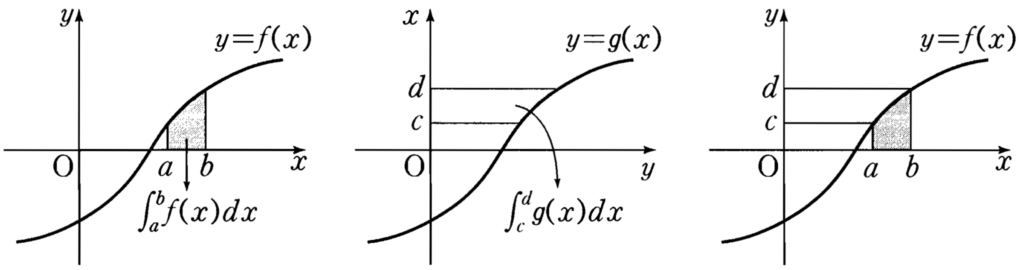
① $y=f(x)$에서 $x \leftrightarrow y$를 때리면 $x=f(y)$이다. 정리하면 $y=g(x)$이다.

② $f(a)=b \Leftrightarrow a=g(b)$

③ $f(g(x))=x$이고 $g(f(x))=x$

④ $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 서로 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$



예제1 함수 $f(x)=x^3+2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\int_2^{10} g(x)dx$의 값을 구하여라.

예제2 함수 $f(x)=x^3-x^2+x$의 역함수가 $g(x)$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

B29 | 위치와 이동거리

개념1 위치 $x(t)$ $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도 $v(t)$ $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 가속도 $a(t)$

※ 위치 $x(t)$: 출발 t초 후 수직선 위 어디에 있는가?

$\Rightarrow v(t)=x'(t)$ $\Rightarrow a(t)=v'(t)=x''(t)$ ($\propto$ 힘 : by 물리)

eg) 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간에 따른 위치 $x(t)$가 다음과 같다.

(1) $x(t)=2t$ (2) $x(t)=t^2$

예제1 다음의 높이의 그래프를 그려라. (단, 가속도는 -10m/s^2이다.)

(1) 45m의 높이에서 자유낙하를 시작하는 물체

(2) 지표면에서 지표면과 수직방향으로 30m/s로 던진 물체

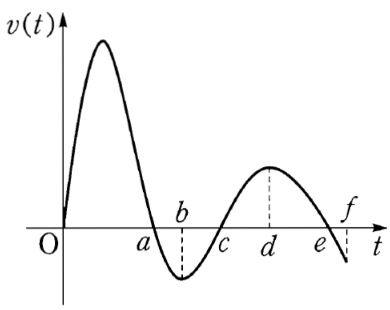
(3) 60m의 높이에서 지표면과 수직방향으로 위로 20m/s로 던진 물체

✓ 위치변화와 이동거리(실제 움직인 거리)의 차이

✓ $x(t)$, $v(t)$, $|v(t)|$, $s(t)$의 그래프

$\Rightarrow$ $v(t)$가 양수이면? $v(t)$가 음수이면?

$\Rightarrow$ 그래프와 x축으로 둘러싸인 넓이의 의미?



예제2 수직선 위를 움직이는 점 P가 0초에 점 A(1)에서 출발하여 그래프와 같은 속도 $v(t)$로 움직인다. 4초일 때, 점 P의 위치를 구하여라.