원포인트 개념주입 C

미분

✏ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분이 가능하다. $\Leftrightarrow$ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재한다.

✔ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$와 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$는 서로 같은 표현이다.

✏ 미분가능하면 연속이다.

개념1

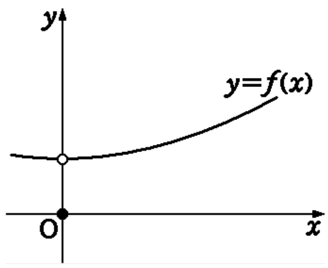
✏ $\lim_{h\to0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수, $\lim_{h\to0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 $f(x)$의 $x=a$에서의 우미분계수라 하자. 이 두 값이 같으면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능이다.

✔ 좌미분계수와 우미분계수는 구간별로 미분하고 $x=a$를 대입해서 구할 수 있다.

✏ $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$를 $f(x)$의 $x=a$에서의 대칭미분계수라 하자. $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=f'(a)$이다. 하지만 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$의 값이 존재한다는 것이 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능함을 의미하지는 않는다.

001.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $x=0$에서 미분가능한 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[1]



ㄱ. $x+f(x)$
ㄴ. $xf(x)$
ㄷ. $|x|f(x)$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002.

삼차함수 $f(x)=x^2(x-1)$에 대하여 $g(x)=|f(x)|$라 할 때, 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?2)

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=f'(0)$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}n\left\{g\left(1+\frac{1}{n}\right)-g(1)\right\}$가 존재한다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}=f'(1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

003.

함수 $f(x)$에 대하여 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?3)

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

✔ 미분계수와 부정형 : $\lim_{\star \to 0} \frac{f(a+\star)-f(a)}{\star}$나 $\lim_{\star \to a} \frac{f(\star)-f(a)}{\star - a}$ 꼴 맞추기.

개념2

004.

다항함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1} \frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가

$$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1} \frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은?4)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

005.

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{f(x)}=1$, $\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(x)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\dfrac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값은?[5)]

① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{5}{6}$

006.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$　(나) $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[6)]

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=0$　ㄴ. $f'(1)=2$　ㄷ. $\lim_{x\to1}\dfrac{f(f(x))}{x-1}=2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

✔ 부정형과 다항식의 결정 : 알아서 잘.

개념3

007.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$와 $\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1}$의 값이 존재한다.

(나) $f(0)=3$

(다) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)f(-x)}{(x-1)^2} = -28$

이때, $f(2)$의 값을 구하여라.7)

008.

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 0+} \dfrac{x^3 f\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5$, $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{3}$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.[8)]

009.

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하여라.[9)]

(가) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4$

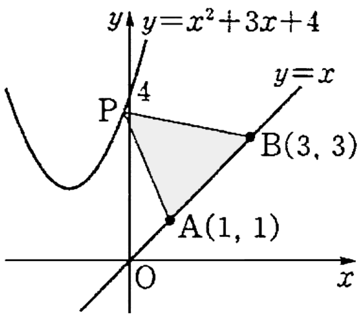
(나) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{x} = 4$

개념4

✏ 접선 : $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이다.
✏ 공통접선 : $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 점 $(\alpha,\ \beta)$에서 공통접선을 가지면,
① $f(\alpha)=g(\alpha)=\beta$ (함숫값이 같다.)
② $f'(\alpha)=g'(\alpha)$ (기울기가 같다.)

010.

그림과 같이 곡선 $y=x^2+3x+4$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=x$ 위의 두 점 A$(1,\ 1)$, B$(3,\ 3)$에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은?[10)]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

011.

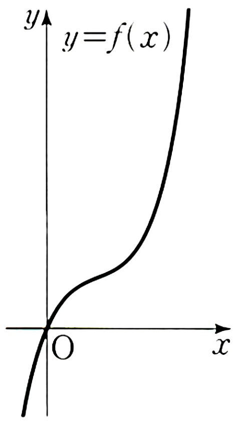
두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=2(x^2+2)$가 한 점에서 접할 때, 상수 a의 값은?[11]

① -7　② -5　③ -3

④ 3　⑤ 5

012.

그림은 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$의 그래프이다. 원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 두 개이다. 두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x좌표의 합을 S라 하자. 이때, $10S$의 값을 구하여라.[12]

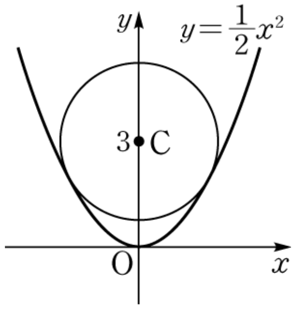


개념5

✏ 법선 : 가끔 쓰인당.
① 점에서의 최단거리를 구할 때,
② 원에 접할 때,

013.

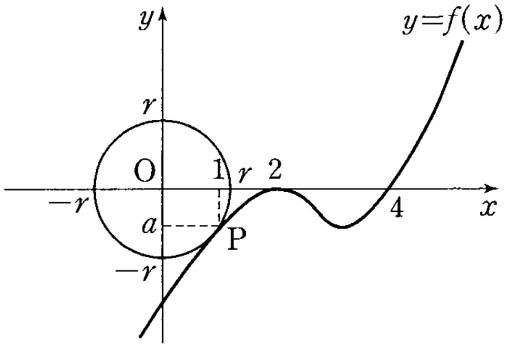
그림과 같이 중심의 좌표가 $(0,\ 3)$인 원 C가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 서로 다른 두 점에서 접할 때, 원 C의 반지름의 길이는?[13)]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

014.

삼차함수 $f(x)$가 $f(2)=f'(2)=0$, $f(4)=0$를 만족시키고, 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원이 점 $\mathrm{P}(1,\ a)$에서만 만난다. r^2의 값은?14)



① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{10}{7}$

④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

015.

곡선 $y=x^2-3x+3$ 위를 움직이는 점과 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 사이의 거리의 최솟값은?15)

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

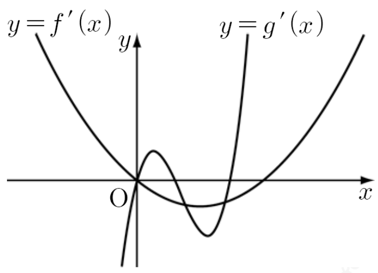
④ 1 ⑤ $2\sqrt{2}-1$

개념6

✔ 두 함수의 차이 : 잘 푼다.

016.

그림은 삼차함수 $y=f(x)$와 사차함수 $y=g(x)$의 도함수들의 그래프이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[16)]



ㄱ. $x<0$에서 $y=f(x)-g(x)$는 증가함수이다.
ㄴ. $y=f(x)-g(x)$는 한 개의 극솟값을 갖는다.
ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$라 할 때, $h'(x)=0$은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

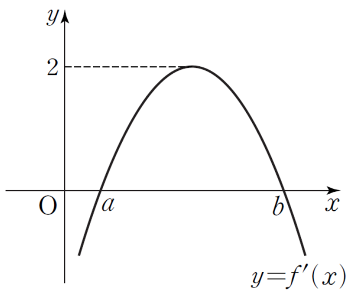
017.

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+3$과 서로 다른 세 점에서 만난다. 이들 세 교점의 x좌표가 각각 -1, 2, 4일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?17)

① -6 ② -4 ③ -2
④ 2 ⑤ 4

018.

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$을 지나고, $f'(x)$의 최댓값은 2이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?18) (단, $a<b$)



ㄱ. 함수 $f(x)$는 열린 구간 $(a,\ b)$에서 증가한다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)-x$가 열린 구간 $(c,\ d)$에서 증가하면 $d-c<b-a$이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)-2x$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념7

✏ $f(x)$가 $x-a$를 인수로 가진다. $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$가 $(a,\ 0)$을 지난다.

✏ $f(x)$가 $(x-a)^2$를 인수로 가진다. $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$가 $(a,\ 0)$에서 x축과 접한다.

✔ 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)=(x-a)^2Q(x)$ $\Leftrightarrow$ $f(a)=0$ 이고 $f'(a)=0$

019.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)+1$은 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어진다.
(나) $f(x)=f(-x)$

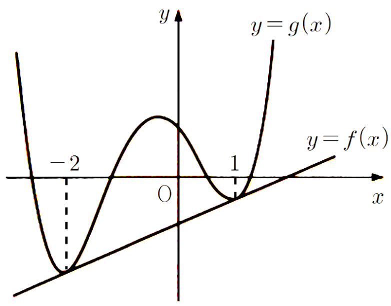
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?19)

ㄱ. $f'(1)=0$
ㄴ. $f(x)+1$은 $(x+1)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄷ. $f(2)=8$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

020.

그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 -2, 1인 두 점에서 접한다. $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, $h(x)$의 극댓값은?[20]



① $\frac{81}{16}$ ② $\frac{83}{16}$ ③ $\frac{85}{16}$

④ $\frac{87}{16}$ ⑤ $\frac{89}{16}$

021.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 방정식 $f(x)+xf'(x)=0$이 $\alpha<\beta<0<\gamma$인
> 세 실근 α, β, γ를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)=0$이다.

옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[21]

> ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다.
> ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 실수인 근은 두 개다.
> ㄷ. $f(\beta)f(\gamma)>0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념8

✏ $f(x)$가 $(x-a)^3$를 인수로 가진다.
$\Leftrightarrow$ $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0$
$\Leftrightarrow$ 충분히 작은 h에 대하여 $f(a-h)f(a+h)<0$이고 $|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능하다.

022.

좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$
(나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은?[22] (단, a, b는 상수이다.)

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

023.

삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2+ax$에 대하여 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$를 $|f(x)-t|$가 미분불가능한 점의 개수로 정의하자. 집합 $\left\{p \,\middle|\, \lim_{x\to p} g(x) \neq g(p)\right\}$의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 a의 값을 구하여라.23)

024.

사차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=1$인 점에서 접한다.
> (다) $f(3)=g(3)$

함수 $|f(x)-g(x)|$가 $x=3$에서만 미분가능하지 않을 때, 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\alpha$에서 극솟값 β를 갖는다. $160(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.24)

✔ 삼차함수 : 익혀둘 만한 성질들이,

① 개형 : 극값을 가질 때와 일대일함수가 될 때

② 변곡점에 대한 대칭성

③ $1 : \sqrt{3}$ 과 $2 : 1$

④ 극댓값과 극솟값의 차이 : $f(\alpha)-f(\beta)=\left|\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3\right|$

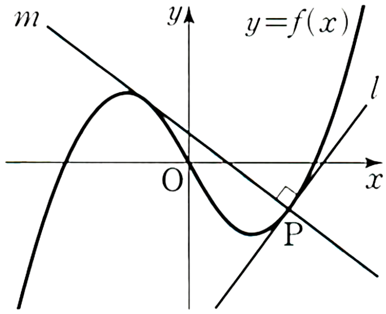
개념9

025.

양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 $(0,\ a)$에서 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하여라.[25)]

026.

그림과 같이 삼차함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x$의 그래프 위의 점 중에서 원점이 아닌 한 점을 P라 하자. 점 P에서의 접선 l과 점 P에서 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선 m이 서로 수직일 때, 점 P의 x좌표를 구하여라.[26] (단, 점 P는 제4사분면 위에 있다.)



027.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?[27]

① 12　② 14　③ 16
④ 18　⑤ 20

개념10

✔ 삼차함수와 그의 변곡점에서 그은 접선으로 나뉜 영역에 따라 그을 수 있는 접선의 개수가 달라진다.

028.

곡선 $y=x^3$ 밖의 한 점 $(2,\ a)$에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있도록 하는 실수 a의 값의 범위는?28)

① $-8<a<0$ ② $-4<a<0$ ③ $-2<a<2$
④ $0<a<8$ ⑤ $0<a<16$

029.

점 $(0,\ t)$에서 곡선 $y=x^3-3x^2+2x\ (x \geq 0)$에서 접선을 그을 수 있는 실수 t의 값의 범위는?29)

① $t \leq 1$ ② $t \geq -1$ ③ $-2 \leq t \leq 2$
④ $t \leq -2$ ⑤ $t \geq 0$

030.

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 곡선 $y=x^3-x$에 그을 수 있는 접선의 개수가 2일 필요충분조건은?30)

① $a+b=0$ ② $-a^3+a+b=0$
③ $(a+b)(-a^3+a+b)=0$ ④ $a \neq 0,\ (a+b)(-a^3+a+b)=0$
⑤ $b \neq 0,\ (a+b)(-a^3+a+b)=0$

개념11

✔ 사차함수 : 개형의 종류 정도는 익혀 놓자.

031.

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a\,|\,\text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하여라.[31)]

032.

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-1)x^2-2ax$이 극댓값을 갖지 않도록 하는 실수 a의 최솟값은?[32)]

① -2　　② -1　　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

033.

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때,
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[33)]

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념12

✔ 방정식의 근의 개수, 부등식의 증명 문제 :
① $f(x)=k$(상수) 꼴로 정리한 후 $y=f(x)$의 그래프를 살핀다.
② 접선 이용해서 푸는 문제 가끔.

034.

모든 실수 x에 대하여 부등식

$$x^4+4kx^2-4(2k+1)x+4k^2 \geq 0$$

이 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값을 구하여라.[34)]

035.

$x \leq 0$일 때, 부등식

$$x^3+6x^2+9x \leq kx$$

를 만족시키는 실수 k의 값의 범위를 구하여라.35)

036.

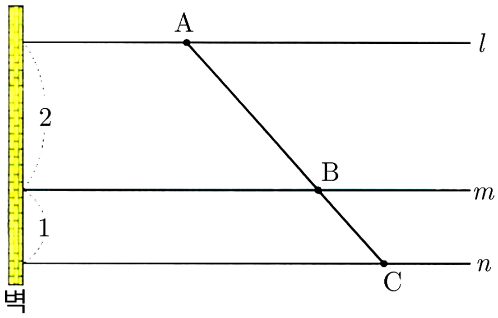
함수 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2ax+2a$가 극값을 갖고, 방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하여라.36)

✔ 시간에 따른 변화율 문제 푸는 숨겨진 비법.
① 시각 t에 대한 식을 구한다.
② t로 미분한다.
③ t에 '~일 때'를 대입한다.
✔ 위치의 시간에 따른 변화율은 속도이고, 속도의 시간에 따른 변화율이 가속도이다.

개념13

037.

다음 그림과 같이 케이블 l, m, n은 모두 벽면과 수직이고, 케이블 사이의 거리가 각각 2, 1이다. l 위의 광원 A에서 m 위의 물체 B에 빛을 비추면 n 위에 그림자 C가 나타난다.



광원 A와 물체 B의 시각 $t(t \le 8)$에서 벽으로부터의 거리를 각각

$$x = 4 - \frac{1}{2}t, \quad y = t^2 - \frac{11}{2}t + 10$$

이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[37] (단, 광원, 물체, 그림자의 크기는 무시한다.)

ㄱ. $t = \frac{5}{2}$에서 광원과 물체의 속도가 같아진다.
ㄴ. A와 C 사이의 거리가 3인 순간은 두 번이다.
ㄷ. $2 < t < 3$에서 그림자 C의 가속도는 1이다.

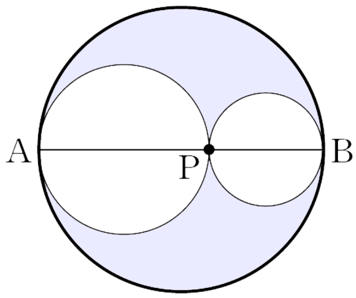
① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

038.

한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다. 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이와 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$이다. 이때, 상수 a의 값을 구하여라.[38]

039.

길이가 20cm인 선분 AB 위의 점 P가 매초 2cm의 일정한 속도로 점 A에서 출발하여 점 B로 움직이고 있다. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원에서 두 선분 AP, PB를 각각 지름으로 하는 두 원을 제외한 부분의 넓이를 S라 하자. 점 P가 점 A를 출발한 후 2초가 되는 순간의 넓이 S의 변화율을 $a\pi(\text{cm}^2/\text{초})$라 할 때, a의 값을 구하여라.[39]



1) ②

2) ③

3) ⑤

4) ①

5) ①

6) ③

7) 15

8) 10

9) 19

10) ③

11) ①

12) 45

13) ④

14) ③

15) ①

16) ⑤

17) ④

18) ⑤

19) ⑤

20) ①

21) ⑤

22) ④

23) 3

24) 130

25) 20

26) $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

27) ④

28) ④

29) ①

30) ④

31) 147

32) ①

33) ⑤

34) $\dfrac{3}{2}$

35) $k \leq 0$

36) $0 < a < \dfrac{9}{4}$

37) ③

38) 36

39) 12