# [미분계수]

## B12 | 평균변화율과 미분계수

**개념1** $f(x)$의 구간 $[a,\ b]$에서의 평균변화율

$\Leftrightarrow$ 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ 사이의 기울기

$\Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**예제1** 다음의 주어진 함수와 구간에 대하여 평균변화율을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2+x$, $[1,\ 3]$

(2) $f(x)=x^2$, $[a,\ b]$

(3) $f(x)=x^2$, $[a,\ a+h]$

**개념2** $x=a$에서의 $f(x)$의 순간변화율 (미분계수)

$\Leftrightarrow$ '$a$ 근처의 아주 짧은 구간에서의 평균변화율'

$\Leftrightarrow$ '$a$에서의 접선의 기울기'

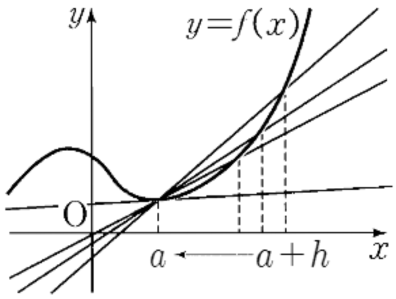
**Note** $f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율

① $f'(a)$, ② $\dfrac{d}{dx}f(a)$, ③ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

✓ 구하는 방법

① 구간 $[a,\ a+h]$에서의 평균변화율을 구한다.

② ①의 평균변화율에다 $h \to 0$을 걸어준다.




개념3 $f'(a)=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

✓ $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$도 같은 표현이다.

예제2 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x)=x^3$일 때, $f'(3)$을 구하여라.

(2) $f(x)=-x^2+3x$일 때, $f'(1)$을 구하여라.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$일 때, $f'(4)$을 구하여라.

탐구1 $\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x)-2}{x-3}=6$에서 알 수 있는 것 :

① $f(3)=2$, ② $f'(3)=6$

탐구2 $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-4}{h}=-2$에서 알 수 있는 것 :

① $f(2)=4$, ② $f'(2)=-2$

# B13 | 미분계수식의 변형

**개념1** $f'(a)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{\bigstar\to0}\dfrac{f(a+\bigstar)-f(a)}{\bigstar}$

⇒ 기하학적 해석?

**예제1** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음을 간단히 하여라.

(1) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}$　(2) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+3h)-f(a)}{2h}$

(3) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$　(4) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

(5) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+5h)-f(a+2h)}{h}$　(6) $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+4h)-f(a-3h)}{h}$

**개념2** $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\bigstar\to a}\dfrac{f(\bigstar)-f(a)}{\bigstar-a}$

**예제2** 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음을 간단히 하여라.

(1) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}$　(2) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x^2)-f(a^2)}{x-a}$

(3) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{f(x^2)-f(a^2)}$　(4) $\lim_{x\to a}\dfrac{xf(x)-af(a)}{x-a}$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}$　(6) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

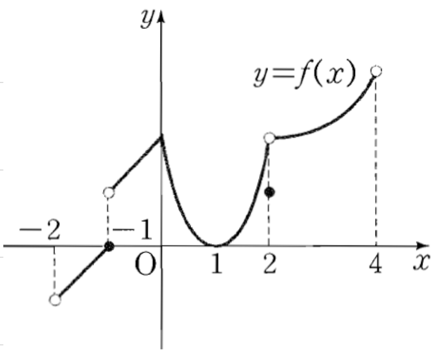
# B14 | 미분가능성

**개념1** 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분이 가능하다.

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$가 존재한다.

$\Leftrightarrow$ 그래프에서의 의미 : '접선이 그어진다.' (매끄럽게 연결된 곡선이다.)

$\Leftrightarrow$ ① 연속이고, ② 좌미분계수와 우미분계수가 같다.




ㄱ. $x=-1$에서 극한값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $x=2$에서 극한값이 존재하지만 불연속이다.

ㄷ. $x=0$에서 연속이지만 미분불가능이다.

ㄹ. $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

**예제1** $f(x)=|x-1|$의 $x=1$에서의 미분가능성을 판단하여라.

**예제2** $f(x)=x|x|$의 $x=0$에서의 미분가능성을 판단하여라.

**예제3** $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<1) \\ 2-x & (x\geq 1)\end{cases}$의 $x=1$에서의 미분가능성을 판단하여라.

**예제4** $f(x)=\begin{cases} x^3-ax & (x<2) \\ x^2+b & (x\geq 2)\end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능하다. $a$, $b$의 값을 구하여라.

# B14E1 | 미분가능성과 연속성

개념1 미분가능하면 연속이다.

증명 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 값이 존재한다.

$\Rightarrow$ 분모가 0으로 가므로 분자가 0으로 간다.

# B14E2 | 미분가능성과 인수

탐구1 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x \leq 1) \\ x+2 & (x>1) \end{cases}$에 대하여,

$\Rightarrow$ 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속인가? (ㅇㅇ)

$\Rightarrow$ 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 미분가능한가? (ㄴㄴ)

$\Rightarrow$ 함수 $(x-1)^2 f(x)$는 $x=1$에서 미분가능한가? (ㅇㅇ)

탐구2 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이다.

함수 $(x-a)f(x)$는 $x=a$에서 연속인가? (ㄴㄴ)

탐구3 함수 $f(x)=\begin{cases} x & (x \neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$에 대하여

함수 $(x-1)g(x)$는 $x=1$에서 미분가능한가? (ㅇㅇ)

# B14E3 | 미분가능성(제대로)

**탐구1** 좌미분계수, 우미분계수는 교과서에서 정의하지 않는 단어다.

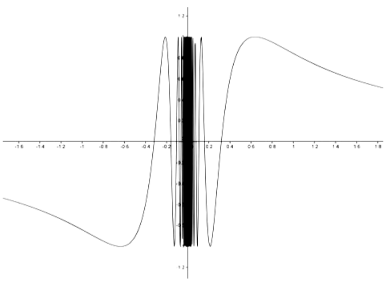
(대학에서 정의하는) 좌미분계수는 $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$이지만,

일반적으로 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\le a) \\ h(x) & (x>a)\end{cases}$일 때 $g'(a)$의 의미로 쓰인다.

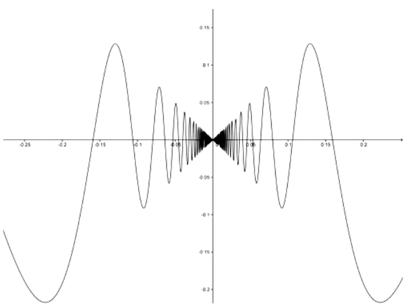
**예제1** $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 판단하여라.

**예제2** $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\ne 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 판단하여라.

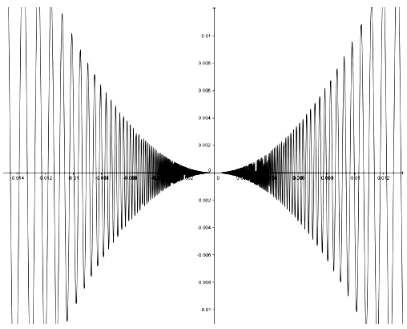
**탐구2** 위상수학자의 사인곡선



$\sin\dfrac{1}{x}$



$x\sin\dfrac{1}{x}$



$x^2\sin\dfrac{1}{x}$

**결론1** 미분가능하다고 해서 (일반적 의미에서의) (좌미)=(우미)인 것은 아니다.

**결론2** 미분가능한 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x\le a) \\ h(x) & (x>a)\end{cases}$일 때,

$g(a)=h(a)$이고 $g'(a)=h'(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

## B14E4 | 미분가능성과 미분계수식

탐구1 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$는 우미분계수의 의미를 가진다.

$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}$이 존재하면 $f'(1)$이 존재한다. (ㄴㄴ)

cf) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h^3)-f(1)}{h^3}$이 존재하면 $f'(1)$이 존재한다. (ㅇㅇ)

cf) $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h^2)-f(1)}{-h^2}$이면 $f'(1)$이 존재한다. (ㅇㅇ)

탐구2 $f(x)=|x-1|$이면 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$

$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이면 $f'(1)=0$이다. (ㄴㄴ)

cf) $f'(1)=0$이면 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다. (ㅇㅇ)

cf) $f(x)$가 미분가능하고 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이면 $f'(1)=0$이다. (ㅇㅇ)

개념1 (교과서에 없음) 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$를

$f(x)$의 $x=a$에서의 대칭미분계수라 한다.

※ $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 대칭미분계수는 $f'(a)$이다.

※ $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않을 때 대칭미분계수가 존재할 수 있다.

# [도함수]

## B15 | 도함수의 뜻

개념1 $f(x)$의 도함수 : 임의의 점에서의 미분계수

(미분계수를 함숫값으로 하는 함수)

Note $f(x)$의 도함수

① $f'(x)$, ② $\dfrac{d}{dx}f(x)$, ③ $\dfrac{dy}{dx}$, ④ $y'$

개념2 $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

eg1) $y=x^2$의 도함수를 구하면 $y'=2x$

eg2) $y=-x^2+2x$의 도함수를 구하면 $y'=-2x+2$

eg3) $y=ax+b$의 도함수를 구하면 $y'=a$

eg4) $y=ax^2+bx+c$의 도함수를 구하면 $y'=2ax+b$

## B15E1 | 함수방정식과 도함수

개념1 $f(x+y)$가 나오면,

① $x=y=0$ 대입.

② $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$에 적용.

✓ $y$에 대하여 미분 → $y=0$ 으로 ②를 쉽게 대체할 수 있다.

**예제1** 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, $f'(0)=1$일 때, $f'(2)$의 값은?

(2) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$, $f'(0)=0$일 때, $f'(x)$를 구하여라.

(3) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy-2$, $f'(0)=2$일 때, $f'(x)$를 구하여라.

(4) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f'(2)=4$일 때, $f'(x)$를 구하여라.

(5) $f(x+y)=f(x)+f(y)+4$, $f'(3)=-2$일 때, $f'(x)$를 구하여라.

(6) $f(2x)=2f(x)$이고 $f'(3)=2$일 때, $f'(6)$의 값은?

# B16 | 다항함수의 미분법

**개념1** 다항함수의 미분법

① $(x^n)'=nx^{n-1}$

② $(cf(x))'=cf'(x)$

③ $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

**증명** $(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+h^2(\cdots)}{h}=\lim_{h\to 0}\{nx^{n-1}+h(\cdots)\}=nx^{n-1}$

예제1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $x^3$

(2) $x^4+x^3+x^2+x+1$

(3) $2x^3-4x^2+3x-3$

# B16E1 | 곱의 미분법

개념1 $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

증명 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

예제1 $f(2)=3,\ f'(2)=2$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x^2f(x)-12}{x-2}$의 값을 구하여라.

# B16E2 | 합성함수의 미분법

개념1 $(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$

※ 원칙적으로 미적분 내용.

증명 $\frac{d}{dx}\{f(g(x))\}=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$

예제1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $(x^2+1)(2x+4)$ (2) $(x^4-x^3)^4$

(3) $f(2x+1)$ (4) $f(3-2x)$

(5) $f(x^2)$ (6) $\{f(x)\}^2$

(7) $(2x+3)f(x)$ (8) $f(x)g(x)h(x)$

# B16E3 | 식의 나눗셈과 미분

✓ 검산식 : $A(x) \div B(x) = Q(x) \cdots R(x)$이면 $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$

✓ 나머지 정리 : 검산식에서 항등식의 성질을 이용, 나머지를 찾는다.

$\Rightarrow$ 특히, $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$이다. (나머지정리)

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) $x^3+2x+3$을 $x-2$로 나눈 나머지는?

(2) $x^2-2x+4$를 $x-a$로 나눈 나머지가 19일 때, $a$의 값은?

(3) $x^{100}+x^{50}+1$을 $x-1$로 나눈 나머지는?

(4) $x^3+2x+3$을 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지는?

(5) $x^3+2x+3$을 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지는?

(6) $x^3-x^2+ax+b$가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어진다. $a$, $b$의 값은?

# B16E4 | 로피탈의 정리

**개념1** 도함수가 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 $f(a)=g(a)=0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

이다.

✓ 대충 쓰고 행복하게 사세요.

**예제1** 다음 물음에 답하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$의 값은?

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+b}{x-3}=4$일 때, $a$, $b$의 값은?

**예제2** 다음 물음에 답하여라.

(1) $f'(a)=-1$일 때, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}$의 값은?

(2) $f'(1)=3$인 함수 $f(x)$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값은?

(3) $f(4)=3$, $f'(4)=-1$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2f(4)-4f(x^2)}{x-2}$의 값은?

(4) 함수 $f(x)=x^3-4x^2$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)\}^2-\{f(2)\}^2}{x-2}$의 값은?

(5) 함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x^2-9}$의 값은?

(6) 다항식 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$일 때, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$의 값은?

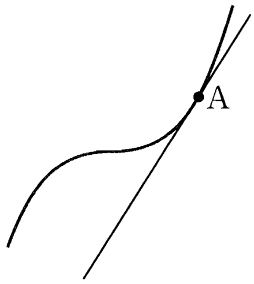
# [도함수의 활용]

## B17 | 접선의 방정식

개념1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서

$y=f(x)$에 접하는 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이다.



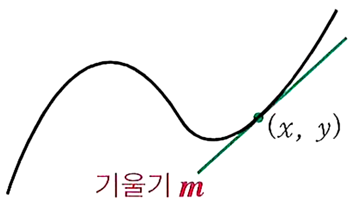

예제1 점 $(3,\ 9)$에서 $y=x^2$에 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

예제2 곡선 $y=-x^2+2x$ 위의 점 $(3,\ -3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

개념2 곡선 $y=f(x)$에 접하는 기울기 $m$인 직선 구하기

① $f'(x)=m$을 풀어서 접점의 $x$값을 구한다.

② 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에 적용.




예제3 $y=x^2$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식을 구하여라.

예제4 $y=x^3$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식을 구하여라.

예제5 직선 $y=4x+k$가 곡선 $y=x^3+2x^2-1$에 접할 때, 정수 $k$의 값을 구하여라.

개념3 점 $(p, q)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선 구하기

① 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 쓴다.

② '①의 직선이 $(p,\ q)$를 지난다.'를 풀어 $t$를 구한다.

※ 접선을 $y=ax+b$를 놓고 푸는 풀이가 쉽게 느껴질 수 있지만,

접점을 설정하는 풀이의 활용도가 높으므로 봉인하도록 한다.

예제6 곡선 $y=x^2$에 접하고 점 $(-3,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

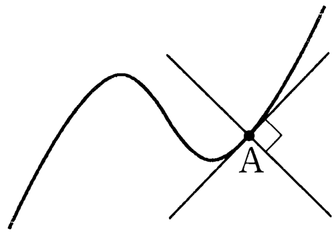
예제7 곡선 $y=x^3$에 접하고 $y$절편이 $-2$인 직선의 방정식을 구하여라.

# B17E1 | 법선의 방정식

개념1 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$를 지나고

그 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$이다.




※ 법선이라는 용어는 교과서에 등장하지 않는다.

예제1 곡선 $y=x^3-x+1$ 위의 점 $(1, 1)$을 지나고,

이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

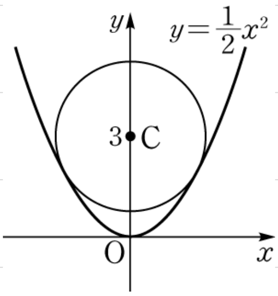
**개념2** 원과 곡선이 접할 때 : 접점에서의 법선이 원의 중심을 지난다.

**개념3** 곡선 위의 동점 P와 정점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최솟값 구하기.

⇒ A를 중심으로 하는 원이 접할 때이다.

점 P에서의 법선이 점 A를 지날 때를 푼다.

**예제2** 그림과 같이 중심의 좌표가 점 C$(0,\ 3)$인 원 $C$가 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 원 $C$의 반지름의 길이를 구하여라.



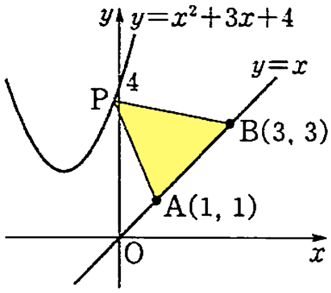

**예제3** 곡선 $y=x^2-3x+3$ 위를 움직이는 점과 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 점 사이의 거리의 최솟값을 구하여라.

# B17E2 | 곡선과 직선 사이의 최단거리

**개념1** 직선과 같은 기울기를 가지는 접선을 그어서 해결한다.

**예제1** 곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점 P에서 직선 $y=2x-6$에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{\mathrm{PH}}$의 최솟값을 구하여라.

예제2 그림과 같이 곡선 $y=x^2+3x+4$ 위의 점 P와 직선 $y=x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(3,\ 3)$에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은?

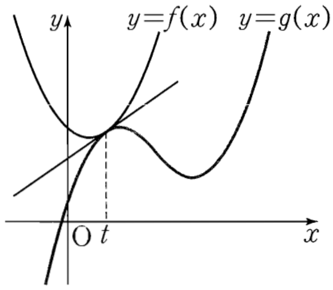



## B17E3 | 한 점에서 접하는 두 곡선

개념1 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 접하면

① 접점의 $x$값을 $t$로 놓는다.

② 연립방정식 $\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases}$를 푼다.




✓ '두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만난다.' $\Rightarrow$ $f(t)=g(t)$

✓ '두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 접한다.' $\Rightarrow$ $f(t)=g(t)$이고 $f'(t)=g'(t)$

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) $y=x^3+ax$와 $y=2x^2+4$가 접한다. $a$의 값은?

(2) $y=x^2-3x+k$와 $y=-x+3$이 접한다. $k$의 값은?

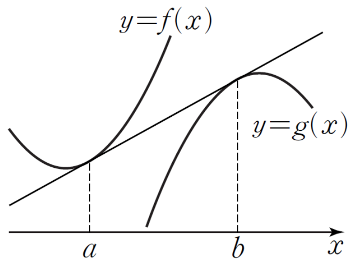
(3) $y=x^3+2x$에 접하고 점 $(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은?

# B17E4 | 접선을 공유하는 두 곡선

개념1 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 공통접선을 가질 때,

접선이 $f(x)$와 $x=a$에서, $g(x)$와 $x=b$에서

접한다고 하면, $f'(a)=g'(b)=\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}$이다.




예제1 두 곡선 $y=x^3+1$, $y=x^3-2$는 한 직선에 동시에 접한다.

이 직선과 두 곡선 $y=x^3+1$, $y=x^3-2$의 접점을 각각

$\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$라 할 때, $b-d$의 값을 구하여라.

# B17E5 | 접선과 제곱인수

개념1 $y=f(x)$가 $x=\alpha$에서 $x$축에 접한다. $\Rightarrow$ $f(x)=(x-\alpha)^2h(x)$

✓ '$x=\alpha$에서 $x$축을 지난다.' $\Rightarrow$ $f(\alpha)=0$ $\Rightarrow$ $f(x)=(x-\alpha)g(x)$

개념2 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=\alpha$에서 접한다. $\Rightarrow$ $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2h(x)$

예제1 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(2, 8)$에서의 접선이 곡선과

다시 만나는 점의 좌표를 구하여라.

# B18 | 평균값의 정리

**개념1** 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속, 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

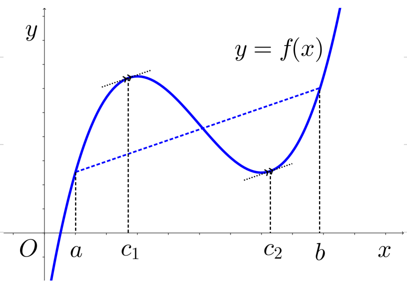
를 만족시키는 $c$가 열린구간 $(a, b)$에 적어도 하나 존재한다.

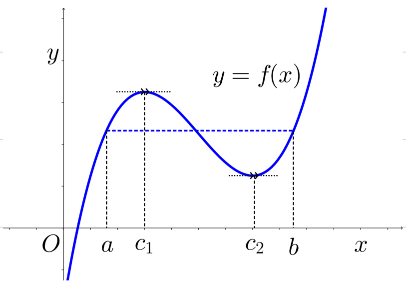
**개념2** 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속, 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능하고,

$f(a)=f(b)$일 때, $f'(c)=0$을 만족시키는는 $c$가 열린구간 $(a, b)$에

적어도 하나 존재한다.



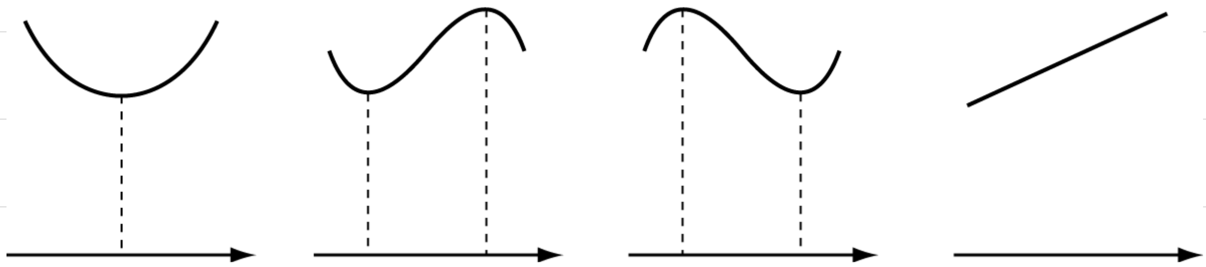




**예제1** 함수 $f(x)=x^2-6x$에 대하여 닫힌구간 $[1, 4]$에서

평균값 정리를 만족시키는 상수 $c$의 값을 구하여라.

# B19 | 함수의 그래프

**탐구** 원함수의 그래프에서부터 도함수의 개형 그리기



**개념1** 도함수에서부터 원함수의 그래프 개형 그리기

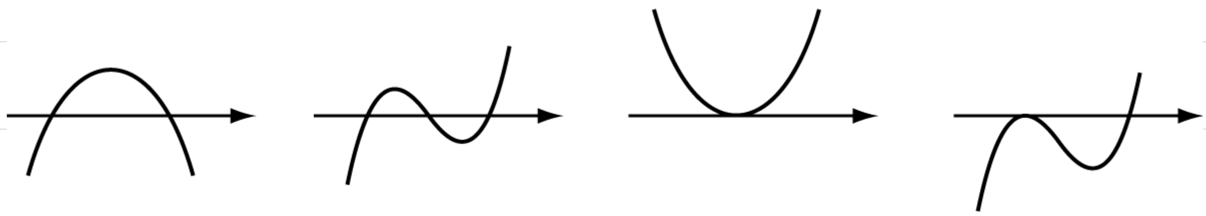
① $f'(x) < 0$이면 $f(x)$는 감소한다.

② $f'(x) > 0$이면 $f(x)$는 증가한다.

⇒ $f'(x)$가 음수에서 양수로 바뀔 때, $f(x)$는 극소가 된다. 반대는 극대

✓ 도함수에서부터 $f(x)$의 위치를 잡을 수 없다. (적분상수)

**예제1** 도함수의 그래프가 다음과 같을 때 원함수의 개형을 각각 그려라.

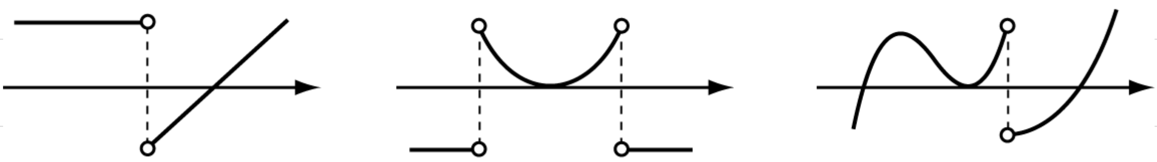


**예제2** 다음 함수의 도함수와 원함수의 그래프를 각각 그려라.

(1) $y=x^3+3x^2-9x$ (2) $y=x^3-6x^2$

(3) $y=x^3$ (4) $y=x^4-4x^3$

**예제3** 도함수의 그래프가 다음과 같을 때 원함수의 개형을 각각 그려라.



## B19E1 | 극대와 극소

**개념1** 미분가능한 $f(x)$가 극대이거나 극소일 때 $f'(x)=0$이다.

**예제1** 다음에서 $a$와 $b$의 값을 구하여라.

(1) $y=x^3+ax+b$가 $x=1$에서 극솟값 $2$를 가진다.

(2) $y=x^3+ax^2+bx$가 $x=2$에서 극댓값을, $x=3$에서 극솟값을 가진다.

(3) $y=-x^3+3x^2+24x+a$가 $x=b$에서 극솟값 $-4$를 가진다.

**개념2** 뾰족점도 극대/극소일 수 있다.

⇒ 극대/극소라고 해서 $f'(x)=0$이라 할 수 없다.

⇒ 극대/극소의 엄밀한 정의?

**개념3** $f'(a)=0$이며 $x=a$에서 극대 또는 극소가 아닐 수 있다.

**예제2** 연속함수 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & (|x|<2) \\ 2x & (|x|\ge 2) \end{cases}$가 극댓값과 극솟값을 모두 가진다.

ㄱ. $a>0$이면 $f(x)$의 극댓값은 $-4$이다.

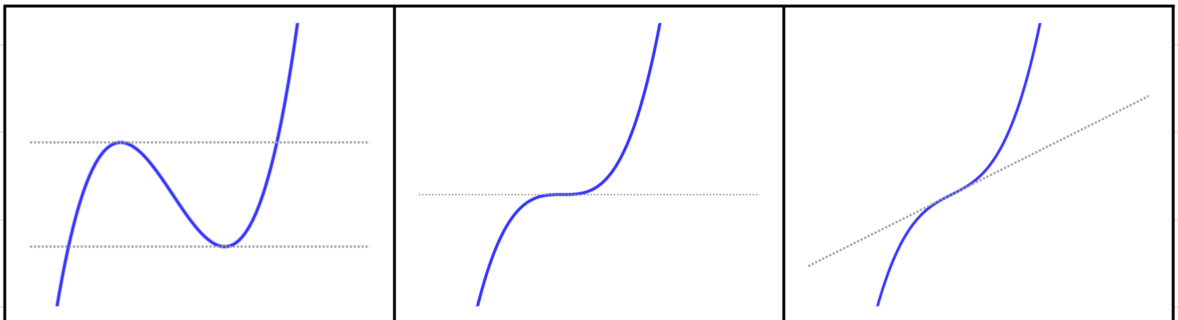
ㄴ. $a<0$이면 $f(x)$의 극댓값은 $4$보다 크다.

ㄷ. 극대인 점과 극소인 점의 $x$좌표의 곱은 양수이다.

## B19E2 | 삼차함수의 그래프1

**개념1** 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+d(a>0)$의 그래프의 개형은

$f'(x)=0$의 $D$의 부호에 따라 아래와 같이 나눌 수 있다.



| | | |
|---|---|---|
| ① $f'(x)=0$의 $D>0$ | ② $f'(x)=0$의 $D=0$ | ③ $f'(x)=0$의 $D<0$ |

✓ 이 중 $D \le 0$, 즉, ②와 ③의 합집합을 다음과 같이 설명할 수 있다.

(i) 극값을 갖지 않는다.

(ii) 증가하는 함수이다. ($x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.)

(iii) 일대일 대응이다. ($x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.)

(iv) 역함수가 존재한다.

**예제1** 함수 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$이 극값을 갖지 않을 때,

상수 $a$의 최솟값을 구하여라.

**예제2** 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x$의 역함수가 존재하도록 하는

$a$의 값의 범위를 구하여라.

**예제3** 함수 $f(x)=-x^3+ax^2-3x-1$이 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여

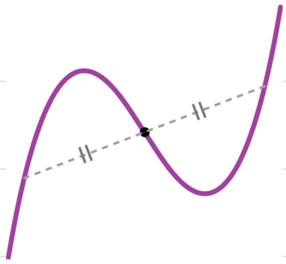
'$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) > f(x_2)$'를 만족시킬 때, 정수 $a$의 개수를 구하여라.

# B19E3 | 삼차함수의 그래프2

**개념1** 삼차함수의 변곡점

① 변곡점은 두 번 미분해서 0이 되는 점이다.

② 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 점대칭이다.



**예제1** 곡선 $y=x(x-3)^2$과 직선 $y=mx$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같을 때, $m$의 값을 구하여라.

**예제2** 양수 $a$에 대하여 곡선 $y=3x^3$에 점 $(a,\ 0)$에서 그은 접선과 점 $(0,\ a)$에서 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하여라.

**예제3** 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+18x+4$의 접선 중 기울기가 최소인 직선의 방정식은 $y=px+q$이다. $p+q$의 값을 구하여라.

**개념2** 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 원점이다.

$f'(x)=0$의 두 실근이 $\pm a$이고, $f(x)=0$의 0이 아닌 두 실근이 $\pm b$일 때,

$|a|:|b|=1:\sqrt{3}$이다.

**개념3** 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 $x$축에 접한다.

$f(x)=0$의 두 실근이 $a$, $b$이고, $f'(x)=0$의 두 실근이 $a$, $c$일 때,

$c=\dfrac{a+2b}{3}$이다.


※ $f''(x)=0$의 실근이 $d$일 때, $d=\dfrac{2a+b}{3}$이다.

**개념4** 최고차항의 계수가 $a$인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서

각각 극댓값, 극솟값을 가질 때, $f(\alpha)-f(\beta)=\left|\dfrac{a}{2}(\beta-\alpha)^3\right|$이다.

**예제4** 함수 $y=-x^2(x-6)$의 그래프를 그리고 극대점의 $x$좌표를 구하여라.

**예제5** 삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 $a$, $b$, $c$에 대하여

$f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=f'(c)=0$을 만족시킨다. $c$를 $a$와 $b$로 나타내어라.

예제6 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$를 구하여라.

(가) 두 극점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$의 중점은 $(0,\ 1)$이다.

(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 $\dfrac{1}{2}$이다.

예제7 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

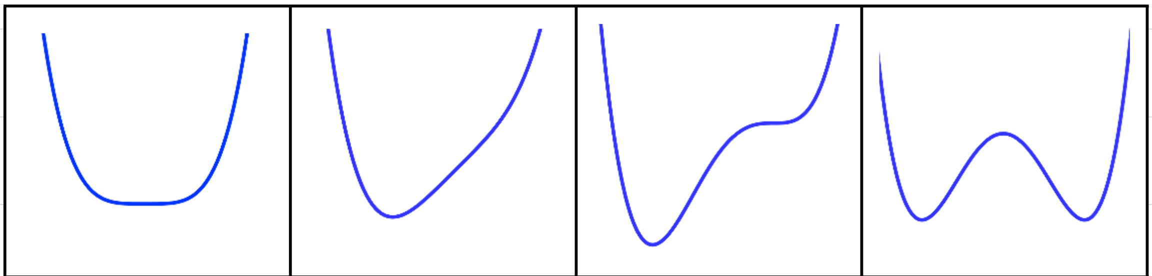
$f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 실근의 개수가 4일 때,

$f(3)$의 값을 구하여라.

## B19E4 | 고차함수의 개형

개념1 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프의 개형은

방정식 $f'(x)=0$의 근의 형태에 따라서 아래와 같은 것들이 있다.



| | | | |
|---|---|---|---|
| 한 실근<br>(삼중근) | 한 실근<br>(두 허근) | 두 실근<br>(하나는 중근) | 세 실근 |

✓ 극댓값을 가진다. $\Rightarrow$ $f'(x)=0$이 세 개의 근을 가진다.

**예제1** 함수 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$이 극댓값을 갖도록 하는 실수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**개념2** 인수분해를 이용하여 그래프 그리기

① $x$절편

② $x\to\pm\infty$일 때의 $y$값 (최고차항과 그 계수)

③ 인수 중 $(x-a)^2$가 있을 때의 튕김

**예제2** 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=(x-2)(x-4)$

(2) $y=-(x-2)(x-4)$

(3) $y=(x+2)(x+1)(x-2)$

(4) $y=(x+2)x(x-2)(x-4)$

(5) $y=(x+2)^2$

(6) $y=(x-2)^2(x-5)$

(7) $y=-(x+1)^2(x-1)^2$

(8) $y=-x(x-2)^2(x-4)(x-6)^2$

**예제3** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=f(8)=0$이고, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)\geq 0$이다. $f(x)$를 구하여라.

**예제4** 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $\{x|f(x)=0\}=\{0,\ 8\}$이고, 함수 $|f(x)|$가 $x=8$에서 미분이 가능하다. $f(x)$를 구하여라.

# B19E5 | 기함수와 우함수의 미분

**개념1** 기함수와 우함수

| | 기함수(홀함수) | 우함수(짝함수) |
|---|---|---|
| 함수식 | $f(-x)=-f(x)$ | $f(-x)=f(x)$ |
| 그래프 | 원점에 대하여 대칭 | $y$축에 대하여 대칭 |
| 다항식 | 홀수차만 | 짝수차만 |
| 함수의 예 | $x$, $2x^3-x$, $\frac{1}{x}$, $\sin x$ | $x^2$, $\|x\|$, $\cos x$ |

**개념2** 기함수를 미분하면 우함수, 우함수를 미분하면 기함수이다.

※ 함수가 다항함수일 때, 차수에 의해서

※ 함수의 그래프에서의 의미?

**예제1** 삼차함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이다.

$f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

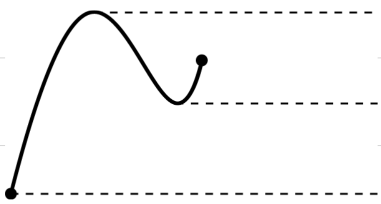
**예제2** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=3$일 때, $f(-2)+f'(-2)$의 값을 구하여라.

# B20 | 그래프의 활용

✓ 미분법 ⇒ 함수의 그래프 ⇒ $\begin{cases} \text{최대최소} \\ \text{방정식의 근} \Rightarrow \text{접선의 개수} \\ \text{부등식의 증명} \end{cases}$

# B20E1 | 함수의 최대최소



극대이면서 최대

극소이면서 최소는 아님

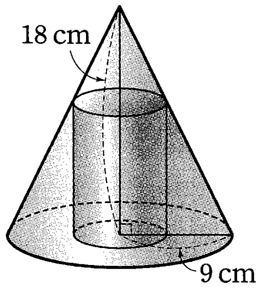
최소 (경계에서)

**개념1** 연속인 함수의 최대최소는 극값/경계에서 얻을 수 있다.

**예제1** $-1 \leq x \leq 3$에서 정의된 함수 $y = x^2(x-3)$의 최소, 최댓값을 구하여라.

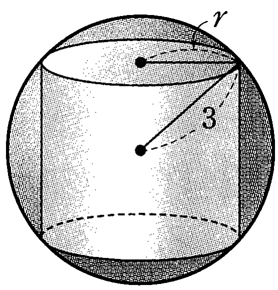
**예제2** $-1 \leq x \leq 5$에서 $y = x^4 - 4x^3 + k$의 최솟값이 3일 때, 최댓값을 구하여라.

**예제3** 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 9cm, 높이가 18cm인 원뿔에 내접하는 원기둥의 부피가 최대일 때, 원기둥의 높이는 몇 cm인지 구하여라.




**예제4** 곡선 $y=12-x^2$과 $x$축으로 둘러싸인 도형에 내접하고 한 변이 $x$축 위에 있는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하여라.

**예제5** 그림과 같이 반지름의 길이가 3인 구에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $r$라 하자. 원기둥의 부피가 최대일 때의 $r$의 값을 구하여라.




**개념2** 접선에 의해서 최대최소가 정해지는 문제와 구별할 것.

**예제6** 곡선 $y=x^3$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-2,\ -8)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, $-2 \le a \le 1$)

# B20E2 | 방정식의 근의 개수

**개념1** 방정식 $f(x)=0$의 근 $\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$의 $x$절편

eg1) 방정식 $x^3-3x+1=0$의 실근의 개수와 부호를 말하여라.

**개념2** 방정식 $f(x)=k$의 근 $\Leftrightarrow$ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 $x$좌표

$\Rightarrow$ 미정계수 이항하고 그래프를 그려본다.

eg2) 방정식 $x^3-6x^2=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $k$의 값에 따라서 구하여라.

**예제1** 다음 물음에 답하여라.

(1) $-x^3+3x^2+9x-k=0$이 두 개의 근을 가지게 하는 $k$의 값은?

(2) $-x^3+3x+1+k=0$이 음수 근 1개, 양수 근 2개를 가지는 $k$의 값의 범위는?

(3) $y=x^3-3x^2$과 $y=9x+k$가 두 개의 교점을 가지도록 하는 $k$의 값은?

(4) $|x^3-3x+1|=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 $k$의 값의 범위는?

**예제2** 방정식 $x^3-3ax+2=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다.

상수 $a$의 값의 범위를 구하여라.

※ 힌트 : $y=x^3$과 $y=3ax-2$의 그래프로 접근해 볼 것

# B20E3 | 접선의 개수

**개념1** 점 $(p,\ q)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수.

① 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식을 쓴다.

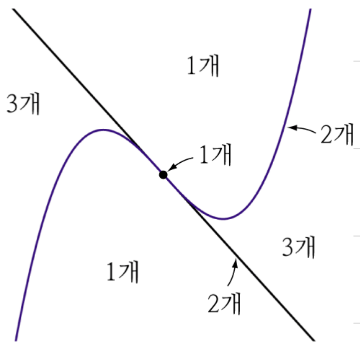
② '①의 접선이 점 $(p,\ q)$를 지난다.'를 식으로 쓴다.

③ ②의 등식의 서로 다른 실근의 개수($t$의 개수)를 구한다.

**예제1** 점 $(1,\ a)$를 지나고 곡선 $y=x^3$에 접하는 직선이 3개가 되도록 하는 $a$의 값의 범위를 구하여라.

**예제2** 곡선 $y=-x^3+3x^2+2$에 접하고 점 $(-1,\ a)$를 지나는 직선이 1개일 때, $a$의 값의 범위를 구하여라.

✓ 접선의 개수는 함수의 그래프와 변곡점에서 그은 접선을 경계로 분류되며 특히 삼차함수의 경우에는 아래 그림과 같이 정해져 있다.



# B20E4 | 부등식의 증명

개념1 닥 그래프로.

eg1) 모든 실수 $x$에 대하여 $x^4-2x^3+x^2+1>0$임을 증명하여라.

eg2) $x>0$일 때, $x^3+3x^2-9x+28>0$임을 증명하여라.

예제1 모든 실수 $x$에 대하여 부등식 $\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-a\geq 0$이

성립하도록 하는 $a$의 값의 범위를 구하여라.

# B21 | 속도와 가속도

개념1 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t$에서의 위치가 $x(t)$일 때,

$\Rightarrow$ 점 P의 속도는 $v(t)=x'(t)$이다.

$\Rightarrow$ 점 P의 가속도는 $a(t)=v'(t)=x''(t)$이다.

✓ 중학교 때 쓰던 속도 : (속도)$=\frac{(\text{거리})}{(\text{시간})}$ (평균속도)

$\Rightarrow$ 이번에 새로 정의한 속도 : $\frac{\Delta x}{\Delta t}\rightarrow\frac{dx}{dt}$ (순간속도)

**예제1** 점 P의 위치가 $x(t)=t^2$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $1\sim2$초의 평균속도  (2) $2\sim5$초의 평균속도

(3) $t=3$일 때의 순간속도  (4) 순간속도의 함수

**예제2** 지표면에서 위로 던진 공의 높이가 $30t-5t^2$이다.

(1) 공이 최고점에 도달할 때의 시각과 공의 높이를 구하여라.

(2) 공이 땅에 떨어질 때의 시각과 공의 속도를 구하여라.

**예제3** 어떤 높이에서 위로 던진 공의 높이가 $-5t^2+20t+60$이다.

(1) 공이 던져질 때의 속도와 높이를 구하여라.

(2) 공이 최고점에 도달할 때의 시각과 공의 높이를 구하여라.

(3) 공이 땅에 떨어질 때의 시각과 공의 속도를 구하여라.

**예제4** 두 점 P와 Q의 위치가 각각 $x_{\mathrm{P}}=-t^2+10t$, $x_{\mathrm{Q}}=t^2-6t+5$이다.

P와 Q가 같은 속도로 움직이는 순간의 Q의 속도와 가속도를 구하여라.

**예제5** 두 점 P와 Q의 위치가 각각 $x_{\mathrm{P}}=t^2-2t-8$, $x_{\mathrm{Q}}=t^2-6t+5$이다.

두 점이 반대방향으로 움직이는 $t$의 값의 범위를 구하여라.

# B21E1 | 변화율

**개념1** 시간에 따라 변하는 양 $A(t)$의 $t=a$일 때의 변화율은 $A'(a)$이다.

$\Rightarrow$ 변화율을 구할 때는 ① $A(t)$ ② $A'(t)$ ③ $A'(a)$의 순으로 구한다.

**예제1** 한 변의 길이가 $3\mathrm{cm}$인 정삼각형이 있다. 각 변의 길이가 매초 $0.5\mathrm{cm}$씩 길어질 때, 6초 후 삼각형의 넓이의 변화율을 구하여라.

**예제2** 높이가 $6\mathrm{cm}$인 직원기둥이 반지름의 길이가 $10\mathrm{cm}$인 구에 내접하고 있다. 이 원기둥이 구에 내접하면서 높이가 매초 $1\mathrm{cm}$씩 줄어들고 있다. 높이가 $4\mathrm{cm}$가 되는 순간의 직원기둥의 부피의 변화율을 구하여라.

**예제3** 키 $1.8\mathrm{m}$인 사람이 높이 $3\mathrm{m}$인 가로등 바로 아래에서 출발하여 한 방향으로 $2\mathrm{m/s}$의 속력으로 걸어간다. 그림자 길이의 변화율과 그림자 끝 점이 움직이는 속도를 구하여라.