원포인트 개념주입 C

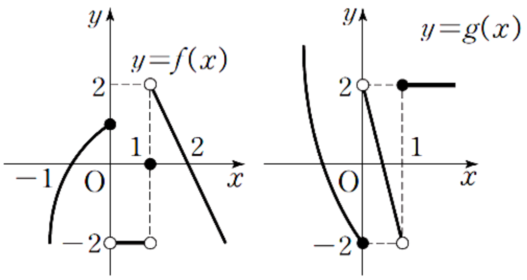
함수의 극한

개념1

✔ 그래프에서 극한값 찾기 : 잘 한다.

001.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 $x=0$에서 극한값이 존재하는 함수만을 있는 대로 고른 것은?1)



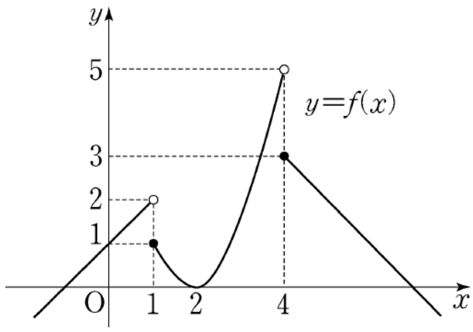
ㄱ. $f(x)g(x)$
ㄴ. $f(x^2)+g(x^2)$
ㄷ. $f(x+1)+g(x+1)$

① ㄴ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

002.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

$\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)+\lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?[2)]

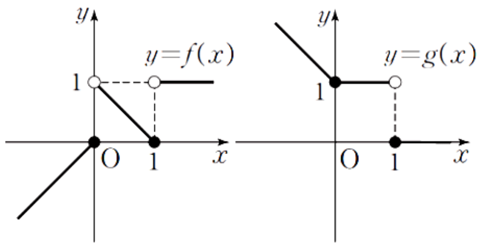


① 3　　② 4　　③ 5

④ 6　　⑤ 7

003.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때,
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[3)]



ㄱ. $\lim\limits_{x\to1} f(x)g(x)=0$

ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

✔ 부정형의 극한값 : 적당히 잘.

개념2

004.

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to 1+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 1-} f(x) = 0$이고, $\lim_{x \to 1} \frac{2f(x)+k}{f(x)+3}$의 값이 존재할 때, 상수 k의 값을 구하여라.4)

005.

함수 $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2}$이 다음 조건을 만족시킨다. $10\alpha+\beta$의 값을 구하여라.[5)]

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\alpha$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to\beta}f(x)=\infty$

006.

최고차항의 계수가 1인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=(a-1)(a-3)$ $(a=1,\ 2)$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to b}f(x)g(x)=(b-2)(b-3)$ $(b=2,\ 3)$

$f(5)g(5)$의 값을 구하여라.[6)]

✔ 미지함수를 포함한 부정형의 연산 : 치환, 꼴 맞추기

개념3

007.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x-a} = 2, \ \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{x-a} = 1$$

일 때, $\lim_{x \to a} \frac{m\{f(x)\}^2 + n\{g(x)\}^2}{\{f(x) - 2g(x)\}(x-a)} = 8$을 만족시키는 두 상수 m, n에 대하여 $m-n$의 값을 구하여라.7)

008.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\{g(x)-2f(x)\}=1$$

일 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2g(x)-f(x)}{4f(x)-g(x)}$의 값을 구하면?8)

① $\dfrac{3}{4}$ ② 1 ③ $\dfrac{6}{5}$

④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

009.

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2f(x)-1}{\sqrt{x^2-f(x)}+f(x)}=3$일 때, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$의 값은?9)

① -1 ② -2 ③ -3

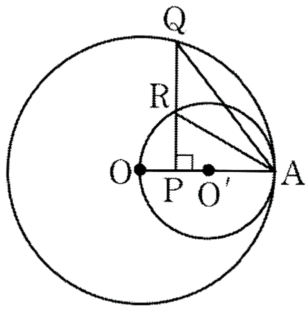
④ -4 ⑤ -5

개념4

✔ 문장제 같은 문항 : 함수를 먼저 구한다.

010.

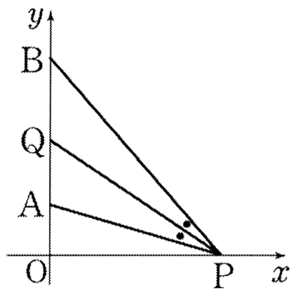
그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 O의 반지름 OA를 지름으로 하는 원 O'이 있다. 선분 OA 위의 점 P를 지나고 선분 OA와 수직인 반직선이 두 원 O, O'과 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 삼각형 APR과 삼각형 APQ의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. 점 P가 점 O에서 선분 OA를 따라 점 A에 한없이 가까워질 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 극한값은?10)



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

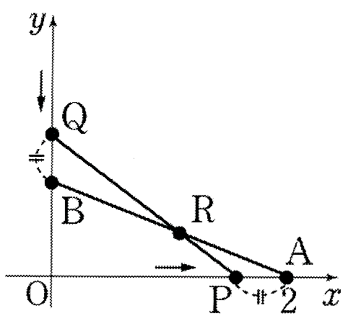
011.

그림과 같이 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$, $\mathrm{P}(t,\ 0)(t>0)$이 있다. $\angle\mathrm{APB}$의 이등분선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, 점 Q의 y좌표를 $f(t)$라 하자. $\lim\limits_{t\to 0+} f(t)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[11] (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



012.

그림과 같이 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, 점 $\mathrm{B}(0,\ 1)$가 있고, x축 위의 점 P는 원점에서 점 A로, y축 위의 점 Q는 점 B로 한없이 가까워진다. 두 점 P, Q가 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{QB}}$를 만족시키며 움직일 때, 두 직선 PQ, QB의 교점 R의 x좌표의 극한값을 구하여라.[12]
(단, 점 Q의 y좌표는 1보다 크다.)



개념5

✔ 연속성의 연산 :
0으로 나누는 경우를 제외하면 연속끼리 더하기 빼기 곱하기 나누기를 해도 연속이다.

013.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $\lim_{x \to a} f(x) \neq 0$이다. 다음 보기 중 $x=a$에서 반드시 연속이라고 할 수 없는 것은?[13] (단, a는 상수)

① $\{f(x)\}^2$　② $\dfrac{3}{f(x)}$　③ $(f \circ f)(x)$

④ $2-5f(x)$　⑤ $f(x)\{f(x)+1\}$

014.

두 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=x^2+2ax+a+6$에 대하여 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에 대하여 연속일 때, 정수 a의 최댓값은?14)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

015.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대한 보기의 설명 중 옳은 것만을 모두 고르면?15)
(단, 함수 $g(x)$의 치역은 함수 $f(x)$의 정의역에 포함된다.)

ㄱ. $f(x)$와 $f(x)+g(x)$가 연속함수이면 $g(x)$도 연속함수이다.
ㄴ. $f(x)$와 $f(x)g(x)$가 연속함수이면 $g(x)$도 연속함수이다.
ㄷ. $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $(f \circ g)(x)$도 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념6

✏ $f(x)$가 $x=a$에서 연속, $g(x)$가 $x=a$에서 불연속, $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면, $f(a)=0$이다.

$\Rightarrow$ $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$는 $(x-a)f(x)$는 연속이 된다. (단, $\lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$가 존재)

✔ $f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \geq a) \\ h(x) & (x < a) \end{cases}$는 $(x-a)^2 f(x)$는 미분가능이 된다. (단, $\lim_{x\to a} g(x)$, $\lim_{x\to a} h(x)$가 존재)

016.

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x & (x \leq 0) \\ x-1 & (0 < x \leq 2) \\ 2x-3 & (x > 2) \end{cases}$$

와 상수가 아닌 다항식 $p(x)$에 대하여
보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?16)

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $p(0)=0$이다.
ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(2)=0$이다.
ㄷ. 함수 $p(x)\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어진다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

017.

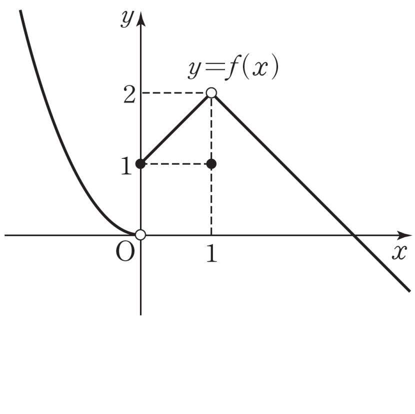
함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-|x|}{x^2} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$$

일 때, 함수 $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하게 되는 최소의 자연수 k의 값을 구하여라.[17)]

018.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(2)$의 값을 구하여라.[18)]



✔ 합성함수의 연속성

① $g(x)$가 $x=a$에서 연속, $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이면 $f(g(x))$는 $x=a$에서 연속이다.

② '$f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $f(g(x))$는 $x=a$에서 연속이다.'라 할 수 없다.

개념7

✔ $f(g(x))$의 연속성 조사 :

① $g(x)$가 불연속인 x값

② $f(b)$가 불연속이 될 때, $g(a)=b$나 $\lim_{x\to a} g(x)=b$가 되는 a값

019.

두 함수 $f(x)=\dfrac{x-2}{|x-2|}$, $g(x)=x^2+2x+a$에 대하여,

함수 $f(g(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 a값의 범위를 구하여라.19)

020.

두 함수 $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x<1) \\ x+2 & (x \geq 1) \end{cases}$, $g(x)=x^2-ax$에 대하여

함수 $g(f(x))$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, a의 값은?20)

① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

021.

두 함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$, $g(x)=x^2-2x$는 모두 $x=a$에서 연속이고,

함수 $(f \circ g)(x)$는 $x=a$에서 불연속이다. 이때 a의 값은?21)

① -3　　② -1　　③ 1

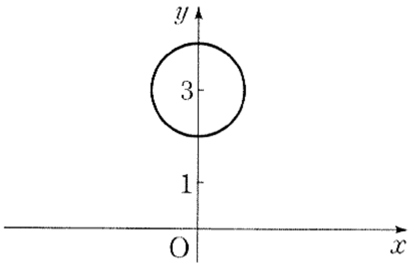
④ 2　　⑤ 3

개념8

✔ 정의된 함수의 연속성 : 조건에 맞는 함수를 잘 구한다.

022.

좌표평면에서 중심이 $(0,\ 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[22]



ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to 1+} f(r)=f(1)$

ㄷ. 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

023.

실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?23)

ㄱ. $\lim_{a \to 0} f(a)=f(0)$

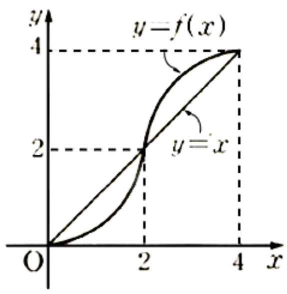
ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a) \neq \lim_{a\to c-} f(a)$인 c는 2개다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

024.

오른쪽 그림은 구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 일대일 대응인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.



$$f^2(x)=(f\circ f)(x),$$
$$f^3(x)=(f^2\circ f)(x),\ \dots,$$
$$f^n(x)=(f^{n-1}\circ f)(x)$$

이고 $g(x)=\lim_{n\to\infty} f^n(x)$로 정의할 때, 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?24) (단, n은 자연수이다.)

ㄱ. $g(1)=1$

ㄴ. $g(3)=4$

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

✔ 가우스 함수의 그래프

① $y=[f(x)]$: $y=n$(정수)로 잘라서 아래로 붙인다.

② $y=f(x)-[f(x)]$: $y=f(x)$에서 $y=[f(x)]$를 뺀다.

③ $y=f([x])$: $x=n$(정수)로 잘라서 왼쪽 점의 값으로 붙인다.

개념9

025.

다음 함수의 그래프를 그려라.[25)]

(1) $y=[x^2]$ $(-1 \le x \le 2)$

(2) $y=x^2-[x^2]$ $(-1 \le x \le 2)$

(3) $y=[x]^2$ $(-1 \le x \le 2)$

(4) $f(x)=[\sqrt{10-x^2}]$ $(-\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10})$

(5) $f(x)=\sqrt{10-[x]^2}$ $(-\sqrt{10} \le x \le \sqrt{10})$

(6) $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$ $(0 \le x \le 9)$

026.

x에 대한 방정식 $x^2-[x^2]=ax+1$이 서로 다른 다섯 개의 실근을 가질 때, 음수 a의 최솟값은?26)

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　③ $-\frac{\sqrt{6}}{6}$
④ $-\frac{\sqrt{7}}{7}$　⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

027.

두 함수 $f(x)=[x^2]$, $g(x)=[x]^2$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?27)
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

ㄱ. $f(\sqrt{2})>g(\sqrt{2})$
ㄴ. x가 정수이면 $f(x)=g(x)$이다.
ㄷ. $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x는 정수이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1) ①

2) ③

3) ⑤

4) 6

5) 21

6) 72

7) 10

8) ④

9) ③

10) ②

11) 13

12) $\frac{4}{3}$

13) ③

14) ②

15) ③

16) ②

17) 3

18) 4

19) $a > 3$

20) ②

21) ②

22) ④

23) ④

24) ⑤

25) (잘 그림)

26) ①

27) ②