[함수의 극한]

B01 | 좌극한과 우극한

탐구 $y=f(x)$에서 x가 a에 한없이 가까이 가면 $y(=f(x))$의 값은 어떻게 되는가?

eg) $f(x)=x^2$에서

$x \to 2$이면 $f(x) \to 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} f(x)=4$

$x \to -1$이면 $f(x) \to 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to -1} x^2=1$

개념1 $y=f(x)$에서 x가 a에 한없이 다가갈 때, y가 b에 한없이 가까워지면

$f(x)$는 b로 수렴한다고 하고 b를 $f(x)$의 극한값이라 한다.

Note $\lim_{x\to a} f(x)=b$: '$x \to a$일 때, $f(x)$가 b로 수렴한다.'

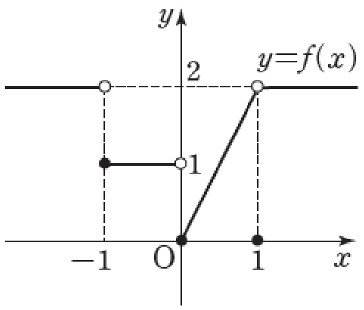
✓ 발산(수렴하지 않음)의 예 : $y=\dfrac{1}{x}$, $\quad f(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{는 유리수}) \\ 0 & (x\text{는 무리수}) \end{cases}$

예제1 다음 극한값을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to 2}(x+1)$ (2) $\lim_{x\to 0}(x+1)$ (3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x}$

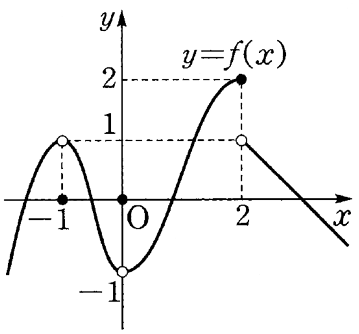
(4) $\lim_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}$ (5) $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}$

✓ 좌극한과 우극한 ($\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$)



	좌극한	우극한	극한값	함숫값
$x=1$				
$x=0$				
$x=-1$				

개념2 좌극한과 우극한이 같으면 극한값이 존재한다.



✓ $\lim_{x \to 2-} f(x) \neq \lim_{x \to 2+} f(x) \Rightarrow$ 극한값이 존재하지 않는다.

✓ $\lim_{x \to -1-} f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 1$

✓ 구간별로 나누어 정의된 함수의 그래프를 그릴 줄 알아야 한다.

예제2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $f(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 3 - x & (x \geq 1) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq 0) \\ -x^2 + 1 & (x > 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x \neq 1) \\ 4 & (x = 1) \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ x & (|x| > 1) \end{cases}$

B02 | 절댓값, 가우스함수의 극한

개념1 좌극한, 우극한을 따로 ⇒ 절댓값, 가우스 제거.

예제1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{[x]}{x}$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{[x]^2+[x]x}{x}$

(4) $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|+|x+1|}{x}$

(5) $\lim_{x \to 2+} ([x]+[x-2]+[-1-x])$

(6) $\lim_{x \to 3-} ([x-5]+[-x+1]+[x^2])$

예제2 $\lim_{x \to 2} (a[x]+x[x])$의 값이 존재하도록 하는 a의 값을 구하여라.

예제3 $\lim_{x \to n} \frac{[x]^2+x}{[x]}$의 값이 존재하도록 하는 정수 n의 값을 구하여라.

B02E1 | 가우스함수의 그래프

개념1 $y=[f(x)]$의 그래프 : $y=f(x)$를 그리고 $y=n$(정수)로 잘라서 내려붙인다.

개념2 $y=f(x)-[f(x)]$의 그래프 : $f(x)$의 그래프에서 $[f(x)]$의 그래프를 뺀다.

개념3 $y=f([x])$의 그래프 : $y=f(x)$를 그리고 $x=n$(정수)로 왼쪽 값으로 붙인다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=[x]$

(2) $y=[\sqrt{x}]$ $(0 \le x \le 9)$

(3) $y=[x^2]$ $(-1 \le x \le 2)$

(4) $y=[(x-1)(x-2)]$ $(0 \le x \le 3)$

(5) $y=x-[x]$

(6) $y=x^2-[x^2]$ $(-1 \le x \le 2)$

(7) $y=[x]^2$ $(-1 \le x \le 3)$

(8) $y=\sqrt{[x]}$ $(0 \le x \le 9)$

B03 | 부정형 0/0 꼴

✓ $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$에서 $f(x)$나 $g(x)$, 둘 중 하나만 0으로 가면 답을 그냥 알 수 있다.

① $f(x) \to 0$이고 $g(x) \not\to 0$이면 $\pm\infty$ (극한값이 존재하지 않는다.)

② $f(x) \not\to 0$이고 $g(x) \to 0$이면 0으로 수렴.

개념1 $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$에서 $f(x) \to 0$이고 $g(x) \to 0$이면 약분하거나 유리화 한다.

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

(3) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+2}\right)$

(4) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(5) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

(6) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1}$

B03E1 | 미정계수법

개념1 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이면, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

개념2 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\alpha(\alpha\neq 0)$에서 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면, $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

※ $\alpha\neq 0$이 없으면?

탐구 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=3$에서 바로 느껴줘야 하는 것.

① 분자가 0으로 가야 한다. (아니면?)

② 분자는 $x-2$를 인수로 가져야 한다.

예제1 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2x^2+ax+b}=\frac{1}{5}$일 때, a, b의 값을 구하여라.

예제2 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=\frac{1}{6}$일 때, a, b의 값을 구하여라.

B04 | 무한대로 갈 때

개념1 분모, 분자의 차수가 가장 큰 항에 신경쓰면 된다.

(x가 $-\infty$로 갈 때는 $-x$를 다른 문자로 치환)

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2+1}}{3x^2+2x+1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

(3) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-x}{x}$ (4) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (6) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+[x]}{x}$

예제2 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 구하여라.

예제3 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=3$, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x^2-4}=6$을 만족시키는 다항함수 $f(x)$를 구하여라.

B05 | 등비수열을 포함한 함수의 극한

탐구1 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+1}{2^n-2}$ (3) $\lim_{n\to\infty}\frac{(0.5)^{n+1}+1}{(0.5)^n-2}$

※ 원칙적으로 수학2에서 출제될 수 없다. 그런데 내신.. 알지?

탐구2 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+3}{x^n+1}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $f(2)$　(2) $f(1)$　(3) $f(0.9)$　(4) $f(-2)$

개념1 $\lim_{n\to\infty}x^n$이 포함된 그래프 :

$x=\pm 1$을 기준으로 구간을 나눠서 극한값을 구한다.

예제1 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{x^n+1}$　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+2}{x^{2n}+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n-1}+x}{x^n+1}$　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+1}{x^{2n}+1}$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)^n-1}{(x-1)^n+2}$　(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2x)^{2n+1}-x}{(2x)^{2n}+1}$

B06 | 함수의 연산과 극한값

개념1 극한값끼리의 더하기, 빼기, 곱하기, 나누기가 가능하다.

✓ 0으로 나누는 것은 불가능하다.

✓ 형태 맞추기와 치환을 이용해서 극한값을 구한다.

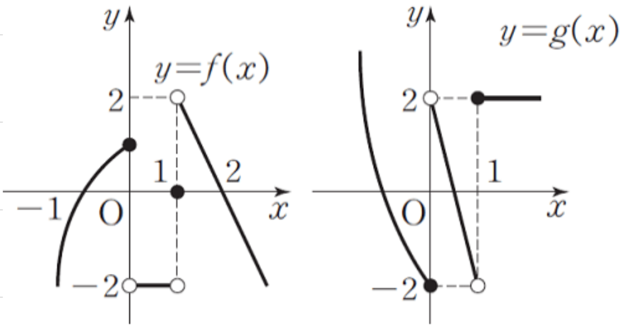
※ 로피탈이 개강력하다.

예제1 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$일 때, $\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x+f(x)}$의 값을 구하여라.

예제2 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$, $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=-2$일 때,

$\lim_{x\to0}\frac{2f(x+1)}{g(x)(x+1)}$의 값을 구하여라.

예제3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같다. 다음을 구하여라.



(1) $\lim_{x\to1}(f(x)+g(x))$

(2) $\lim_{x\to1}(f(x)-g(x))$

(3) $\lim_{x\to0}f(x)g(x)$

B06E1 | 샌드위치 정리

개념1 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이면 $\lim_{x\to a}f(x)\leq\lim_{x\to a}g(x)$이다.

$\Rightarrow$ $f(x)<g(x)<h(x)$이고 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$이다.

예제1 다음을 구하여라.

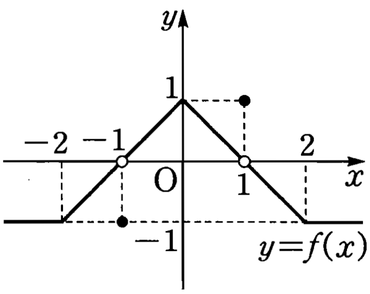
(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

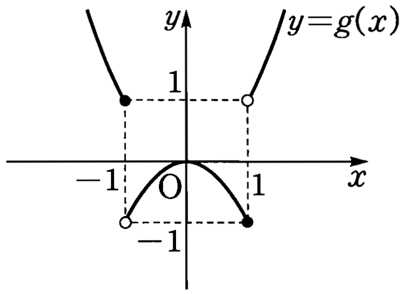
(3) $\lim_{x\to0}\sin x\cos\frac{1}{x}$ (4) $\lim_{x\to\infty}\frac{[x]}{x}$

예제2 $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}(f(x)+2g(x))=4$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}$의 값을 구하여라.

B06E2 | 합성함수의 극한

예제1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 다음을 구하여라.





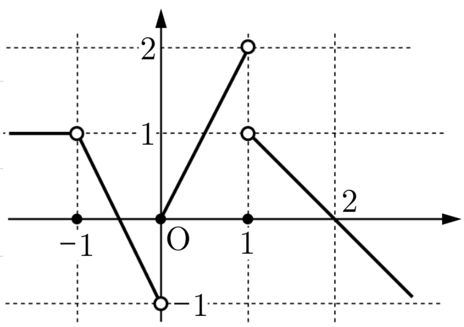
(1) $\lim\limits_{x\to-2+} g(f(x))$ (2) $\lim\limits_{x\to-2-} g(f(x))$ (3) $\lim\limits_{x\to-1+} g(f(x))$

(4) $\lim\limits_{x\to-1-} g(f(x))$ (5) $\lim\limits_{x\to0+} g(f(x))$ (6) $\lim\limits_{x\to0-} g(f(x))$

(7) $\lim\limits_{x\to1+} g(f(x))$ (8) $\lim\limits_{x\to1-} g(f(x))$ (9) $\lim\limits_{x\to2+} g(f(x))$

(10) $\lim\limits_{x\to2-} g(f(x))$ (11) $\lim\limits_{x\to0} f(g(x))$ (12) $\lim\limits_{x\to1+} f(g(x))$

예제2 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 다음을 구하여라.



(1) $\lim\limits_{x\to1+} f(f(x))$ (2) $\lim\limits_{x\to1-} f(f(x))$ (3) $\lim\limits_{x\to-1-} f(f(x))$

(4) $\lim\limits_{x\to-1+} f(f(x))$ (5) $\lim\limits_{x\to0-} f(x+1)$ (6) $\lim\limits_{x\to0+} f(x+1)$

(7) $\lim\limits_{x\to-1+} f(x^2)$ (8) $\lim\limits_{x\to-1-} f(x^2)$ (9) $\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$

✓ 편향성의 이해.

예제1 $f(x)=[x]$이고 네 함수 $g_k(x)$가 각각

$$g_1(x)=(x-2)^2+1,\quad g_2(x)=-(x-2)^2+1,\quad g_3(x)=(x-2)^3+1,\quad g_4(x)=1$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to2} f(g_1(x))$ (2) $\lim_{x\to2} f(g_2(x))$

(3) $\lim_{x\to2} f(g_3(x))$ (4) $\lim_{x\to2} f(g_4(x))$

예제2 다음을 간단히 하여라.

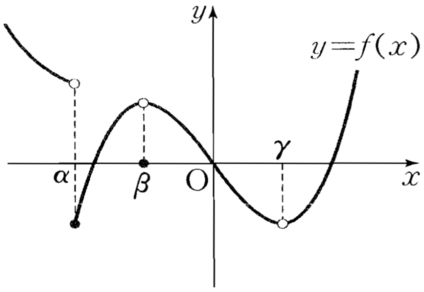
(1) $\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (2) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ (3) $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)$

(4) $\lim_{x\to0} f(x^2)$ (5) $\lim_{x\to0} f(1-x^2)$ (6) $\lim_{x\to0} f(\cos x)$

✓ $\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n}\right]=0$이고 $\left[\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]=1$이다.

[함수의 연속]

B07 | 연속의 뜻



i) $x=\alpha$에서 극한값 ×

ii) $x=\beta$에서 극한값≠함숫값

iii) $x=\gamma$에서 함숫값 × (불연속?)

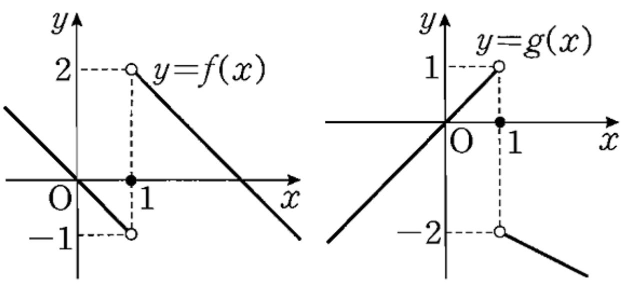
개념1 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

⇔ $x=a$에서의 극한값과 함숫값이 같다.

⇔ 좌극한, 우극한, 함숫값이 같다.

⇔ $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$

예제1 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 물음에 답하여라.



(1) $x=1$에서 $f(x)+g(x)$가 연속인가?

(2) $x=1$에서 $f(x)g(x)$가 연속인가?

(3) $x=1$에서 $f(x-1)g(x)$가 연속인가?

B07E1 | 구간에서의 연속성

Note $\{x|a<x<b\}$: 열린구간 $(a,\ b)$, $\{x|a\le x\le b\}$: 닫힌구간 $[a,\ b]$

✓ $(a,\ b]$, $(-\infty,\ \infty)$, $[a,\ \infty)$ 등등.

개념1 함수 $f(x)$가 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

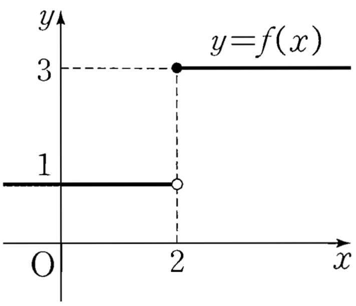
$\Leftrightarrow$ 구간 $(a,\ b)$에 속하는 모든 실수 x에서 연속이다.

개념2 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

① 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

② $f(a)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)$, ③ $f(b)=\lim\limits_{x\to b-}f(x)$

eg)



i) $x=2$에서 불연속

ii) $[0,\ 2]$에서 불연속

iii) $[2,\ 4]$에서 연속

✓ 다항함수, 지수함수, 로그함수 등은 모두 정의역 내에서 연속이다.

✓ 유리함수는 분모가 0이 아닐 때 연속이다.

eg) 함수 $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$는 $x\neq 1$, $x\neq 2$인 모든 점에서 연속이다.

예제1 $\dfrac{2x+5}{x^2+4x+a}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하여라.

✓ $[f(x)]$는 $f(x)$가 정수가 될 때 불연속이 될 여지가 있다.

예제2 함수 $[x^2]$이 구간 $[1, 3]$에서 불연속이 되는 점의 개수를 구하여라.

예제3 함수 $[\log_2 x]$가 구간 $\left(\dfrac{1}{2^{10}}, 1\right)$에서 불연속이 되는 모든 x의 값들의 합은?

B08 | 조각정의된 함수의 연속성

예제1 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \neq 3) \\ a & (x=3) \end{cases}$가 $x=3$에서 연속일 때, a의 값을 구하여라.

예제2 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<3) \\ -x+a & (x \geq 3) \end{cases}$가 $x=3$에서 연속일 때, a의 값을 구하여라.

예제3 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & (x \neq 1) \\ 3 & (x=1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, a, b의 값을 구하여라.

예제4 $x \neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-2)f(x)=x^2-x-a$를 만족시키는 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(2)$의 값을 구하여라.

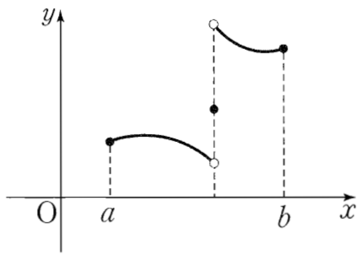
예제5 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+ax^2+1}{x^n+1}$이 $x=1$에서 연속이다. a의 값을 구하여라.

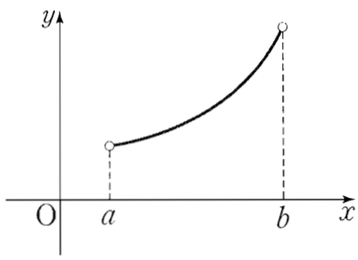
예제6 $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+ax+b}{x^{2n}+1}$이 실수 전체의 집합에서 연속이다. a, b의 값을 구하여라.

B09 | 최대최소의 정리

개념1 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

※ 개당연하고 증명 안 되니까 힘쓰지 말자.





B10 | 사잇값의 정리

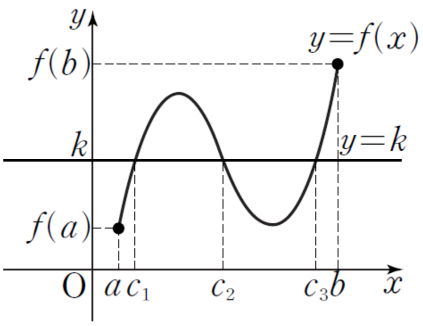
개념1 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여

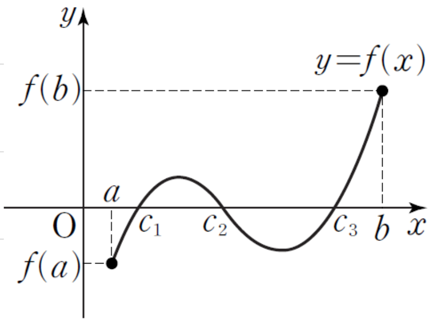
$f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 k에 대하여

$f(c)=k$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

개념2 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)f(b)<0$이면

방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.





✓ 문제 풀 때는 그냥 그래프 개형을 째려본다.

예제1 $x^2-2x+\frac{1}{2}=0$는 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

예제2 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=2$, $f(1)=-1$, $f(2)=-3$, $f(3)=1$, $f(4)=3$, $f(5)=-6$일 때, $f(x)=0$은 최소 몇 개의 실근을 가지는지 구하여라.

예제3 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=4$, $f(4)=2$를 만족시킬 때, $f(x)=x$은 최소 몇 개의 실근을 가지는지 구하여라.

예제4 방정식 $\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{2}$의 실근을 p라 할 때, $[p]$의 값을 구하여라.

B11 | 연속성의 연산

개념1 $x=a$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 연속이면

① $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $|f(x)|$ 등도 연속이다.

② $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $f(a) \neq 0$일 때 연속이다.

예제1 다음의 참거짓을 말하여라.

ㄱ. $x=a$에서 $f(x)$와 $f(x)+g(x)$가 모두 연속이면 $g(x)$가 연속이다.

ㄴ. $x=a$에서 $f(x)$와 $f(x)g(x)$가 모두 연속이면 $g(x)$가 연속이다.

ㄷ. $x=a$에서 $f(x)$와 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 모두 연속이면 $g(x)$가 연속이다.

ㄹ. $x=a$에서 $f(x)$가 연속이면 $|f(x)|$가 연속이다.

ㅁ. $x=a$에서 $|f(x)|$가 연속이면 $f(x)$가 연속이다.

ㅂ. $x=a$에서 $f(x)+g(x)$가 연속이면 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 연속이다.

예제2 함수 $\dfrac{\sin x}{x^2-4x+a}$가 실수 전체의 집합에서

연속이 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하여라.

B11E1 | 연속함수와 불연속함수의 곱

개념1 $x=a$에서 $f(x)$가 불연속, $g(x)$가 연속이고

$x=a$에서 $f(x)g(x)$가 연속이면 $g(a)=0$이다.

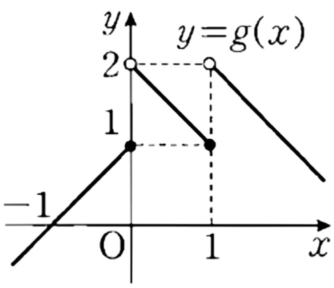
예제1 두 함수 $f(x)=[x]$, $g(x)=x-4$에 대하여, 함수 $f(x)g(x)$가

실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 x의 값을 구하여라.

예제2 함수 $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)$에 대하여,

$y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, 함수 $f(x)g(x)$가

실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(2)$를 구하여라.



✓ $x=a$에서 $f(x)$가 불연속, $g(x)$가 연속이고

$g(a)=0$이면, $x=a$에서 $f(x)g(x)$가 연속이다. (거짓)

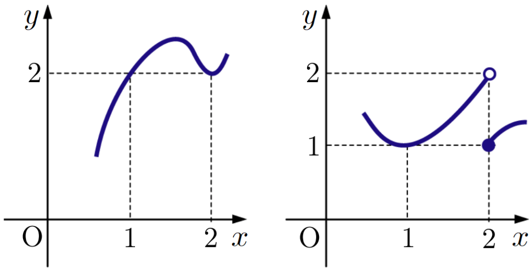
B20E2 | 합성함수의 연속성

개념1 $f(x)$가 $x=a$에서, $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면

함수 $g(f(x))$가 $x=a$에서 연속이다.

예제1 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때,

다음의 연속성을 판단하여라.



$y=f(x)$ $y=g(x)$

ㄱ. $x=1$에서 $f(x)g(x)$ ㄴ. $x=1$에서 $g(f(x))$

ㄷ. $x=1$에서 $f(g(x))$ ㄹ. $x=2$에서 $f(x)g(x)$

ㅁ. $x=2$에서 $g(f(x))$ ㅂ. $x=2$에서 $f(g(x))$

예제2 다음의 참거짓을 말하여라.

ㄱ. $x=a$에서 $f(x)$와 $g(x)$가 모두 연속이면 $x=a$에서 $g(f(x))$가 연속이다.

ㄴ. $x=a$에서 $f(x)$가 연속, $x=f(a)$에서 $g(x)$가 연속이면

$x=a$에서 $g(f(x))$가 연속이다.

ㄷ. $x=a$에서 $f(x)$가 연속이고 $x=f(a)$에서 $g(x)$가 불연속이면

$x=a$에서 $g(f(x))$가 불연속이다.