원포인트 개념주입 C

수열

✏ 등차수열 $\{a_n\}$의 두 항 a_l, a_m이 주어져 있을 때, 이 등차수열의 공차는 $\dfrac{a_l-a_m}{l-m}$이고, 일반항은 $a_n=a_l+\dfrac{a_l-a_m}{l-m}(n-l)$이다.

개념1

001.

수열 x, a_1, a_2, a_3, y와 수열 x, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, y이 모두 등차수열일 때, $\dfrac{a_3-a_1}{b_5-b_4}$의 값을 구하여라.[1) (단, $x \neq y$)

002.

4와 20 사이에 m개, 20과 52 사이에 n개의 수를 넣어서 등차수열

$$4,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m,\ 20,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n,\ 52$$

을 만들었다. 이 때, m, n 사이의 관계식은?[2)]

① $n=2m-1$　② $n=2m+1$　③ $n=2m+3$
④ $n=3m$　⑤ $n=3m+1$

003.

어떤 등차수열에서 제p항이 $\frac{1}{q}$이고, 제q항이 $\frac{1}{p}$일 때, 이 수열의 첫째항부터 제pq항까지의 합을 구하여라.[3)] (단, $p \neq q$이다.)

✏ 등차수열은 $an+b$꼴로 나타나고 이는 직선 $ax+b$ 위의 점들로 나타낼 수 있다.
$\Rightarrow$ $an+b=0$이 될 때, 좋은 일이 일어난다.
✏ 등차수열의 합은 상수항이 없는 이차식의 형태이며
'$an+b$를 적분한 것 같은' 모양을 가진다.

개념2

004.

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=S_n$
(나) $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=T_n$
(다) $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+1}{3n-2}$

이때, $\dfrac{a_5}{b_5}$의 값을 $\dfrac{q}{p}$라 할 때 $p+q$의 값을 구하여라.4) (단, p, q는 서로소인 자연수)

005.

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_{10}=S_{15}$일 때, $S_n=0$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.5)

006.

첫째항이 60인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19} < T_{20}$
(나) $T_{20} = T_{21}$

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n의 최솟값과 최댓값의 합을 구하여라.6)

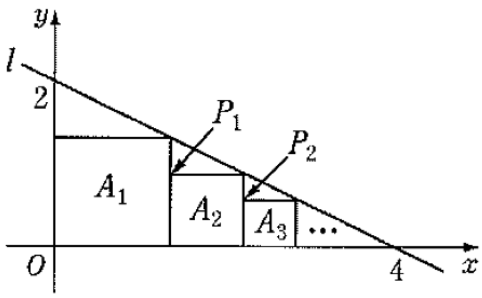
개념3

✔ 등비수열의 일반항 : a_1r^{n-1}

✔ 등비수열의 합 : $\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

007.

그림과 같이 좌표 평면 위에 직선 $l: y=-\frac{1}{2}x+2$가 있다. 두 변이 x축과 y축 위에 있고, 한 꼭짓점이 직선 l 위에 있는 정사각형을 A_1이라 하자. 또, 두 변이 x축과 정사각형 A_1의 한 변 위에 있고, 한 꼭짓점이 직선 l 위에 있는 정사각형을 A_2라 하자. 또, 두 변이 x축과 정사각형 A_2의 한 변 위에 있고, 한 꼭짓점이 직선 l 위에 있는 정사각형을 A_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 정사각형 $A_n(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만들어 나갈 때, 정사각형 A_n의 한 변 위에 놓인 정사각형 A_{n+1}의 꼭짓점 중에서 x축 위에 있지 않은 점을 P_n이라 하자. 점 P_{10}의 x좌표와 y좌표의 합을 구하면?7)

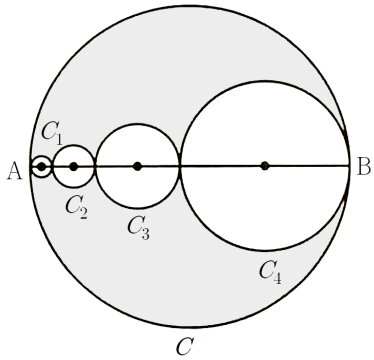


① $4\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right\}$　② $2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right\}$　③ $4\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

④ $\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$　⑤ $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

008.

지름 AB의 길이가 30인 원 C가 있다. 그림과 같이 네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심이 모두 선분 AB 위에 있으며 서로 외접하고, 반지름의 길이는 순서대로 등비수열을 이룬다. 두 원 C_1, C_4는 원 C에 내접하고 원 C_1의 반지름의 길이가 1일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.8)



009.

농작물에 피해를 주는 P병충이 발생하여 2026년부터는 매년 농작물의 피해량이 전년도까지의 총피해량과 같았다. 그런데 2032년 여름에 P병충을 막는 약품이 개발되어 2032년의 피해량은 전년도와 같았고, 2033년의 피해량은 전년도 피해량의 $\frac{1}{2}$로 줄어들었으며, 2033년 이후에도 매년 피해량은 전년도 피해량의 $\frac{1}{2}$이 될 것으로 예상된다. 2025년까지 P병충에 의한 농작물의 총피해량이 a이었을 때, 2037년까지 P병충에 의한 농작물의 총피해량을 a로 나타내면?9)

① $127a$ ② $155a$ ③ $201a$
④ $255a$ ⑤ $287a$

개념4

✔ 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 할 때,

① $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} - \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = nd$

② S_n, $S_{2n} - S_n$, $S_{3n} - S_{2n}$, $S_{4n} - S_{3n}$, $\cdots$는 공차가 $n^2 d$인 등차수열이다.

010.

공차가 d, 항의 개수가 $2n$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대한 다음의 사항을 n과 d에 대한 식으로 나타내어라.10)

(1) 홀수항들의 합과 짝수항들의 합의 차이가 A이다.

(2) 제1항부터 제n항까지의 합과, 제$(n+1)$항부터 제$2n$항까지의 합의 차이가 B이다.

011.

n개의 항으로 이루어진 등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$

이때 n의 값을 구하여라.[11]

012.

두 수 55와 110 사이에 $2n$개의 수를 넣어 첫째항이 55, 끝항이 110인 등차수열을 만든다. 이 수열의 처음 $(n+1)$개의 항의 합을 A, 뒤에서 $(n+1)$개 항의 합을 B라 할 때, $A:B=9:13$이 성립한다. 이 수열의 둘째 항을 구하여라.[12] (단, n은 자연수이다.)

✔ 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이라 할 때,

개념5

① $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = r\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$

② S_n, $S_{2n}-S_n$, $S_{3n}-S_{2n}$, $S_{4n}-S_{3n}$, $\cdots$는 공차가 r^n인 등비수열이다.

③ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{S_n}{a_1 a_n}$

013.

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합이 12, 첫째항부터 제$2n$항까지의 합이 15일 때, 첫째항부터 제$3n$항까지의 합은 S_{3n}이다. $4\mathrm{S}_{3n}$의 값을 구하여라.[13)]

014.

첫째항이 2이고 항의 개수가 짝수인 등비수열에서 홀수 번째 항들의 합은 182, 짝수 번째 항들의 합은 546이다. 이때, 이 수열의 항의 개수를 구하여라.[14)]

015.

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$이고, 곱이 32일 때,

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$의 값은?[15)]

① $\frac{31}{4}$ ② $\frac{31}{8}$ ③ $\frac{31}{12}$

④ $\frac{8}{31}$ ⑤ $\frac{4}{31}$

개념6

✔ 원리합계 : 해두자.

016.

정부가 통일 이후 필요한 통일 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2001년부터 매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전 년도보다 6%씩 증액한다. 2001년 1월 1일부터 10조 원을 적립하기 시작한다면 2010년 12월 31일까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조 원인가?[16] (단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고, $(1.06)^{10}$은 1.8로 계산한다.)

① 160　② 162　③ 180
④ 198　⑤ 220

017.

이달 초에 120만원짜리 TV를 할부로 구입하고 이달 말부터 일정한 금액을 12회로 나누어 갚는다면 매달 얼마씩 갚아야 하는가?[17] (단, $1.01^{12}=1.1$, 월이율 1%, 1개월마다의 복리로 계산한다.)

① 124000원　② 128000원　③ 130000원
④ 132000원　⑤ 136000원

018.

2020년말부터 1000만원씩 10년간 받는 연금이 있다. 이 연금을 2020년 초에 한꺼번에 지급받는다면 약 얼마를 받게 되는지 구하여라.[18] (단, $1.05^{10}=1.63$, 연이율은 5푼, 1년마다의 복리로 계산하고, 천원 이하는 버린다.)

개념7

✔ 합과 일반항 : 잘 해보자.

019.

수열 $\{a_n\}$은

$$3\sum_{k=1}^{n} a_k = 4a_n - 4^{n+1} \ (n \geq 1) \ \cdots\cdots \ (*)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에서
>
> $$3\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_{n+1} - 4^{n+2} \ \cdots\cdots \ ㉠$$
>
> 이다. ㉠에서 (*)을 빼서 정리하면
>
> $$a_{n+1} = 4a_n + \boxed{(가)}$$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{a_n}{4^n}$이라 하면
>
> $$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{(가)}}{4^{n+1}}$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $$b_n = \boxed{(나)}$$
>
> 이다. 그러므로 $a_n = \boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{g(5)h(2)}{f(3)}$의 값은?[19)]

① $\dfrac{7}{3}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{14}{3}$

④ $\dfrac{19}{3}$ ⑤ $\dfrac{25}{3}$

020.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=\frac{2n+1}{n+1}$을 만족시킬 때, a_{100}의 값은?[20)]

① $\frac{1}{98}$ ② $\frac{1}{99}$ ③ $\frac{1}{100}$

④ $\frac{1}{101}$ ⑤ $\frac{1}{102}$

021.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+2a_{n-1}+a_n=n^3$이 성립할 때, $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하여라.[21)]

✔ 시그마의 연산 : 잘 해보자.

개념8

022.

다음 급수의 값을 구하여라.[22)]

(1) $\sum_{i=1}^{10}\left\{\sum_{j=1}^{5}(i+j-1)\right\}$

(2) $\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}2^{k+n}\right)$

(3) $\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=2}^{10}k^2+\sum_{k=3}^{10}k^2+\cdots+\sum_{k=10}^{10}k^2$

023.

$\sum_{k=1}^{20} a_k = 50$, $a_{20} = 2$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{19} k(a_k - a_{k+1})$의 값을 구하여라.[23)]

024.

첫째항이 p이고 공차가 $p-1$인 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{10} (-1)^k a_k = 40$$

을 만족할 때, a_5의 값을 구하여라.[24)] (단, p는 상수이다.)

✔ 급수의 망원화 : 잘 해본다.

개념9

025.

첫째항이 1이고 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{9} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{6}$일 때, S_{10}의 값은?25)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

026.

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{30}}+\sqrt{a_{31}}}=3$$

일 때, a_n의 공차를 구하여라.[26)]

027.

수 $\sum_{k=1}^{50}(k^2+1)k!$이 5^n으로는 나누어 떨어지고 5^{n+1}으로는 나누어 떨어지지 않게 되는 자연수 n의 값을 구하여라.[27)]

✏ 점화식의 풀이 : 기본적인 것들은 해 두자.

개념10

028.

각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이고,

$$(a_{n+1})^2 = 2a_n a_{n+2} \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면
>
> $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \ (n \geq 1)$$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$이라 하면 $b_1 = 2$이고
>
> $$b_{n+1} = \boxed{(가)} \times b_n$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
>
> $$b_n = 2 \times \{\boxed{(가)}\}^{n-1}$$
>
> 이다.
>
> $$a_n = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \cdots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \ (n \geq 2)$$
>
> 를 이용하여 a_n을 구하면
>
> $$a_n = 2^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{(나)}} \ (n \geq 1)$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $\dfrac{1}{p} \times f(8)$의 값은?[28)]

① 42 ② 49 ③ 56
④ 63 ⑤ 70

029.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때,

$$a_1 = 1,\ S_n = 2a_n - 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다. a_5의 값은?29)

① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

030.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때,

$$a_1 = 3,$$
$$(n+1)a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다. a_{10}의 값은?30)

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

✔ 귀납법 : 잘

개념11

031.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$이고

$$na_{n+1} - 2na_n + \frac{n+2}{n+1} = 0 \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \ \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=1$일 때, (좌변) $= a_1 = 3$,

(우변) $= 2^1 + \dfrac{1}{1} = 3$이므로 $(*)$이 성립한다.

ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_k = 2^k + \dfrac{1}{k}$이므로

$$\begin{aligned} ka_{k+1} &= 2ka_k - \frac{k+2}{k+1} \\ &= \boxed{\text{(가)}} - \frac{k+2}{k+1} \\ &= k2^{k+1} + \boxed{\text{(나)}} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a_{k+1} = 2^{k+1} + \dfrac{1}{k+1}$이므로

$n = k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_n = 2^n + \dfrac{1}{n}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $f(3) \times g(4)$의 값은?[31)]

① 32　② 34　③ 36

④ 38　⑤ 40

032.

다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여 3^n-2n을 4로 나눈 나머지가 1임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

i) $n=2$일 때 $9-4=5$이므로 4로 나눈 나머지는 1이다.
ii) $n=k(k\geq 2)$일 때,
3^k-2k을 4로 나눈 나머지가 1이라고 가정하면
자연수 m에 대하여 $3^k-2k=4m+1$이다.
$n=k+1$일 때,
$3^{k+1}-2(k+1)=3(3^k-2k)+\boxed{\text{(가)}}$
$=4(3m+\boxed{\text{(나)}})+1$
따라서 $n=k+1$일 때에도 $3^{k+1}-2(k+1)$을 4로 나눈 나머지가 1이다.
i), ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 3^n-2n을 4로 나눈 나머지가 1이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)+g(7)$의 값은?32)

① 25 ② 27 ③ 29
④ 31 ⑤ 33

033.

다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=(2n-3)\cdot 2^n+3 \quad \cdots \text{㉠}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것의 일부이다.

i) $n=2$일 때,
(좌변)$=1\cdot 1+3\cdot 2=7$
(우변)$=(2\cdot 2-3)\cdot 2^2+3=7$이므로 ㉠이 성립한다.
ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면
$1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2k-1)\cdot 2^{k-1}=(2k-3)\cdot 2^k+3 \quad \cdots$ ㉡
㉡의 양변에 $(\boxed{\text{(가)}})\cdot 2^k$을 더하면
$1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 2^2+\cdots+(2k-1)\cdot 2^{k-1}+(\boxed{\text{(가)}})\cdot 2^k$
$=\boxed{\text{(나)}}\cdot 2^k+3$
⋮

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(5)+g(5)$의 값은?33)

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

1) 3

2) ②

3) $\frac{1}{2}(pq+1)$

4) 44

5) 25

6) 61

7) ①

8) 140π

9) ①

10) (1) $|nd| = A$
(2) $|n^2 d| = B$

11) 13

12) 60

13) 63

14) 6

15) ②

16) ③

17) ④

18) 7730만원

19) ①

20) ④

21) 121

22) (1) 375
(2) 2604
(3) 3025

23) 10

24) 41

25) ④

26) 2

27) 14

28) ①

29) ④

30) ②

31) ⑤

32) ①

33) ⑤