원포인트 개념주입 B

수열

개념1

✔ 등차수열, 등차중항, 조화수열 : 잘 하자.

001.

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_p = q$, $a_q = p$일 때, a_{p+q}의 값은?1) (단, $p \neq q$)

① 0　② $p+q$　③ pq

④ $\frac{q}{p}$　⑤ $\frac{p}{q}$

002.

두 자리의 자연수 중 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 모든 수를 작은 수부터 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 할 때, $2a_n$이 세 자리의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수는?2)

① 13　② 14　③ 15

④ 16　⑤ 17

003.

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$\{a_n\}$: 200, 196, 192, 188, 184, $\cdots$

$\{b_n\}$: 100, 103, 106, 109, 112, $\cdots$

일 때, 두 자연수 l, m에 대하여 $a_l = b_m$을 만족시키는 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수를 구하여라.3)

✏ 등차수열의 합은 (항들의 평균)×(항의 개수)이다.

✔ 항들의 평균을 일반적으로 $\dfrac{(\text{첫 항})+(\text{마지막 항})}{2}$를 이용하여 구한다.

개념2

004.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_m - S_n = 7a_{21}$이 성립할 때, 두 자연수 m, n의 합 $m+n$의 값을 구하여라.4) (단, $m > n$)

005.

1과 11 사이에 $3n$개의 수를 넣어 만든 등차수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{3n},\ 11$

의 합이 282일 때, $a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{3n-1}$의 값은?5)

① 45 ② 60 ③ 75
④ 90 ⑤ 105

006.

n개의 항으로 이루어진 등차수열

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 260$

이때 n의 값을 구하여라.6)

✏ 합과 일반항 : $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$이면 $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$이다.

개념3

007.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$, $\sum_{k=1}^{n} ka_k = T_n$이다. 모든 자연수 n에 대하여 $T_n = n(n+1)(n+2)$일 때, $S_{10} - S_8$의 값은?7)

① 59 ② 61 ③ 62
④ 63 ⑤ 64

008.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,$

$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4\ \ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

일 때, a_{20}을 구하여라.8)

(단 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$이다.)

009.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n = n^3 + pn$

이고, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $b_1 = a_1$
(나) $b_n = a_n - a_{n-1}\ \ (n \geq 2)$

수열 $\{b_n\}$이 등차수열일 때, 상수 p의 값은?9)

① 3 ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ -1 ⑤ -3

✏ 등차수열의 합은 상수항이 없는 이차식 an^2+bn으로 나타낼 수 있다.
✔ 공차는 $2a$, 첫째항은 $a+b$이다.
✔ 필요충분이다. (합이 an^2+bn꼴이면 등차수열이다.)

개념4

010.

수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n=2n^2-28n$$

일 때, 처음으로 양수가 나오는 항은 제 몇 항인지 구하여라.10)

011.

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-4n+k$인 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 공차가 d인 등차수열을 이룰 때, 상수 k와 공차 d의 합 $k+d$의 값은?11)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

012.

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 A_n, B_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{2n+7}{3n+4}$이 성립할 때, $\dfrac{a_{11}}{b_{11}}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.12) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

013.

공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_nT_n=n^2(n^2-1)$$

일 때, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?13)

ㄱ. $a_n=n$이면 $b_n=4n-4$이다.
ㄴ. $d_1d_2=4$
ㄷ. $a_1\neq 0$이면 $a_n=n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

✔ 등비수열의 일반항, 등비중항 : 잘 한다.

개념5

014.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}$$

를 만족시키고

$$\frac{a_{10}}{a_1} + \frac{a_{11}}{a_2} + \cdots + \frac{a_{19}}{a_{10}} = 100$$

일 때, $\frac{a_{20}}{a_{11}}$의 값을 구하여라.14)

015.

각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$(a_2)^2 + (a_3)^2 = 3, \quad (a_4)^2 + (a_5)^2 = 36$$

일 때, $(a_6)^2 + (a_7)^2$의 값은?15)

① 412 ② 432 ③ 452
④ 476 ⑤ 496

016.

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열일 때, 수열 $\left\{a_n(a_{n+1})^2\right\}$은 어떤 수열인가?16)

① 첫째항이 a^3, 공비가 r^3인 등비수열
② 첫째항이 a^2r^2, 공비가 ar^3인 등비수열
③ 첫째항이 a^2r^2, 공비가 r^3인 등비수열
④ 첫째항이 a^3r^2, 공비가 ar^3인 등비수열
⑤ 첫째항이 a^3r^2, 공비가 r^3인 등비수열

개념6

✏ 등비수열의 합 : $\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

017.

첫째항부터 제10항까지의 합이 2이고, 제11항부터 제20항까지의 합이 12인 등비수열의 제21항부터 제30항까지의 합을 구하여라.17)

018.

첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$a_2+a_4+\cdots+a_{2k}=170$,

$a_1+a_3+\cdots+a_{2k-1}=85$

를 만족시키는 k의 값을 구하여라.18)

019.

어떤 나팔꽃 덩굴은 땅에서 싹이 튼 다음 일주일 후의 길이가 10cm가 되고, 그 후 2개월 동안은 매주 지난 주에 자란 길이의 $\dfrac{4}{5}$배만큼 자란다고 한다. 싹이 튼 후 8주 동안 자란 나팔꽃 덩굴의 길이를 구하여라.19) (단, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^8=0.17$로 계산한다.)

개념7

✔ 시그마의 뜻과 성질 : 잘 한다.

020.

$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$을 n에 대한 내림차순으로 나타내면 an^2+bn+c이다. 상수 a, b, c의 곱 abc의 값은?20)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

021.

수열

$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ 1+2+2^2+2^3,\ \cdots$

의 첫째항부터 제n항까지의 합은?21)

① 2^n-n　② $2^{n+1}-1$
③ $2^{n+1}-n$　④ $2^{n+1}-n-1$
⑤ $2^{n+1}-n-2$

022.

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n(n+2)$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_{3k}$의 값은?22)

① 310　② 320　③ 330
④ 340　⑤ 350

✔ 시그마의 풀이
① 다항식
② 등비수열(&멱급수)
③ 망원급수(소거형)

개념8

023.

수열 1×1, 2×3, 3×5, 4×7, $\cdots$에서 첫째항부터 제n항까지의 합은?[23)]

① $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ ② $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-1)$
③ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ④ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
⑤ $\frac{1}{6}n(n+1)(4n+1)$

024.

$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}k\right)=56$을 만족시키는 n의 값은?[24)]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

025.

$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$의 값은?[25)]

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{11}{10}$ ③ $\frac{10}{11}$
④ $\frac{20}{11}$ ⑤ $\frac{11}{20}$

026.

다음을 간단히 하여라.[26)]

(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

✔ 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

개념9

① $a_{n+1}=a_n+d$ or $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ $\Rightarrow$ 등차수열

② $a_{n+1}=ra_n$ or $(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$ $\Rightarrow$ 등비수열

027.

수열 $\{a_n\}$이

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

를 만족시킨다. $a_1=3$, $a_5=25$일 때, a_{33}의 값은?27)

① 175 ② 176 ③ 177
④ 178 ⑤ 179

028.

$a_1=1$, $4a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n을 구하면?28)

① $\frac{1}{n}$ ② $\frac{1}{2n-1}$ ③ $\frac{1}{3n-2}$
④ $\frac{1}{4n-3}$ ⑤ $\frac{1}{5n-4}$

029.

$a_1=3$, $a_4=-24$, $(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하여라.29)

030.

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=3,$$
$$2\log a_{n+1}=\log a_n+\log a_{n+2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{10}a_{2k-1}$의 값은?30)

① 3^9-1 ② $9^{10}-1$ ③ 9^9-1
④ $\frac{1}{8}(9^{10}-1)$ ⑤ $\frac{1}{8}(9^9-1)$

✔ 기본 점화식의 풀이

① $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴

② $a_{n+1}=f(n)a_n$ 꼴

③ $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴

개념10

※ 교육과정은 아닌데, 이정도는 해 두자.

031.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3^{n-6}+n$$

을 만족시킬 때, $a_{10}-a_7$의 값은?31)

① 60 ② 63 ③ 66 ④ 69 ⑤ 72

032.

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?32)

① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ $\frac{17}{4}$

033.

수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=-1,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의할 때, a_9-a_{10}의 값은?33)

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{128}$ ③ $\frac{1}{256}$ ④ $\frac{1}{512}$ ⑤ $\frac{1}{1024}$

개념11

✔ S_n을 포함한 점화식 : $S_n - S_{n-1} = a_n$을 이용한다.
① n번째 식과 $n-1$번째 식을 빼서 S_n을 소거한다.
② a_n 대신에 $S_n - S_{n-1}$을 대입하여 S_n에 대한 점화식을 푼다.

034.

수열 $\{a_n\}$이

$a_1 = 1$,

$3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = (n+2)a_n\,(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

과 같이 정의될 때, $a_n > 100$을 만족시키는 최소의 자연수 n의 값은?[34]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

035.

수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 2S_n = a_{n+1} - 1 \ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

을 만족시키는 a_n 및 S_n을 구하여라.[35]

036.

$a_1 = 1$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때

$$nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3 \ \ (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 자연수 n에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$이므로
>
> $na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3$ …… ㉠
>
> 이다. 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3$ …… ㉡
>
> 이고, ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터
>
> $na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{\text{(가)}}$
>
> 를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면
>
> $$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{\text{(가)}}}{n(n+1)}$$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{a_n}{n}$이라 하면,
>
> $b_{n+1} = b_n + 3 + \boxed{\text{(나)}}\ (n \geq 2)$
>
> 이므로
>
> $b_n = b_2 + \boxed{\text{(다)}}\ (n \geq 3)$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(3)}{g(3)h(6)}$의 값은?[36]

① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

✔ 점화식의 적용 : 대충 많이 넣어본다.

개념12

037.

수열 a_n이 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n \geq 2)\\ \sqrt[3]{2}\,a_n & (a_n<2)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, a_{112}의 값은?37)

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ 2

038.

양수 x에 대하여 $< x >$는 x보다 크거나 같은 최소의 정수를 나타내기로 한다. 예를 들면,

$<2>=2$, $<2.5>=3$

이다. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=10,\ a_n=a_{<\frac{n}{2}>}+1\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

로 정의할 때, a_{50}의 값을 구하여라.38)

039.

수열 $\{a_n\}$이 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=2}^{20}a_n^2$의 값은?39)

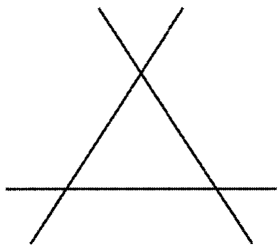
① 90 ② 93 ③ 94
④ 96 ⑤ 98

✔ 수열의 귀납적 정의 : 귀납적으로 정의해본다.

개념13

040.

평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 $n(n \geq 3)$개의 직선이 있다. n개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$을 나타낸다. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.40)



041.

수직선 위의 점 $\mathrm{P}_{n+2}(a_{n+2})$는 점 $\mathrm{P}_n(a_n)$과 점 $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1})$을 연결하는 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점이다. $\mathrm{P}_1(0)$, $\mathrm{P}_2(5)$일 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식은?41) (단, $n \geq 2$)

042.

비어 있는 물탱크에 물을 채우려고 한다. 첫째 날은 7L의 물을 채우고, 다음 날부터 전날 채운 물의 양의 $\frac{4}{3}$배보다 1L 적은 양을 채우기로 하였다. 열 번째 날 물탱크에 채우는 물의 양은 몇 L인가?42)

① $4\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+3$ ② $4\left(\frac{4}{3}\right)^{9}+3$ ③ $4\left(\frac{5}{3}\right)^{9}+3$

④ $4\left(\frac{4}{3}\right)^{10}+3$ ⑤ $4\left(\frac{5}{3}\right)^{10}+3$

✔ 수학적 귀납법의 증명 구조를 이해한다.
① $p(k)$와 $p(k+1)$을 정확하게 쓴다.
② $p(1)$과 '$p(k)$이면 $p(k+1)$이다.'를 증명한다.

개념14

043.

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot 2^n = (2n)(2n-1) \cdots (n+2)(n+1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)=(우변)=2
(ⅱ) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot 2^k = (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

$n=k+1$일 때,
㉡의 양변에 $\boxed{(가)}$를 곱하면

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot \boxed{(나)}$$
$$= (2k)(2k-1) \cdots (k+2)(k+1) \cdot \boxed{(가)}$$
$$= (2k+2)(2k+1)(2k) \cdots (k+2)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명과정에서 (가), (나)에 들어갈 식을 차례로 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(10)}$의 값은?43)

① $\dfrac{1}{1024}$ ② $\dfrac{1}{512}$ ③ 512
④ 1024 ⑤ 2048

044.

다음은 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

$\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1}$에서

$$2^{\boxed{(가)}} > n(n-1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

(ⅰ) $n=3$일 때 ㉠에서
(좌변)=16, (우변)=6
따라서 $n=3$일 때 ㉠이 성립한다.
(ⅱ) $n=k\,(k \geq 3)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1} > k(k-1)$$

이므로 양변에 2를 곱하면

$$2 \cdot 2^{k+1} = 2^{k+2} > 2k(k-1) \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

그런데 $k \geq 3$일 때,

$$2k(k-1) - \boxed{(나)} \geq 0$$

이므로 ㉡에서

$$2^{k+2} > \boxed{(나)}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 $n \geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1}$가 성립한다.

위의 증명과정에서 (가)에 들어갈 식을 $f(n)$, (나)에 들어갈 식을 $g(k)$라 할 때, $f(5)g(5)$의 값은?44)

① 30 ② 80 ③ 120
④ 150 ⑤ 180

1) ①

2) ④

3) 9

4) 41

5) ④

6) 13

7) ④

8) 39

9) ④

10) 8

11) ③

12) 116

13) ③

14) 10

15) ②

16) ⑤

17) 72

18) 4

19) 41.5

20) ①

21) ⑤

22) ④

23) ④

24) ②

25) ④

26) (1) $\sqrt{n+1}-1$
(2) $(n+1)!-1$
(3) $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$

27) ⑤

28) ④

29) -1023

30) ④

31) ②

32) ②

33) ④

34) ④

35) $\dfrac{3^n-1}{2}$

36) ②

37) ⑤

38) 16

39) ②

40) $a_{n+1}=a_n+n+1$

41) $a_{n+1}=a_n+5\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$($a_{n+2}=\frac{2}{5}a_{n+1}+\frac{3}{5}a_n$에서 변형)

42) ②

43) ④

44) ⑤