원포인트 개념주입 A

수열

수열

개념1

✔ a_1, a_2, a_3, a_4, $\cdots$, a_n, $\cdots$
와 같이 차례로 나열된 수의 열을 수열이라 하고 각 수를 수열의 항이라 한다.
n번째 항 a_n을 이 수열의 일반항이라 한다.

001.

다음 수열의 일반항을 구하여라.1)

(1) 2, 4, 6, 8, 10, $\cdots$

(2) 10, 100, 1000, 10000, 100000, $\cdots$

(3) 1, -1, 1, -1, $\cdots$

(4) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\cdots$

(5) -1, 2, -3, 4, -5, $\cdots$

(6) 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\cdots$

002.

다음 일반항을 가지는 수열을
첫째항부터 제4항까지 나열하여라.2)

(1) $a_n = -n$

(2) $a_n = 7 - 3n$

(3) $a_n = n^2 - 1$

(4) $a_n = 3 \cdot 2^n$

(5) $a_n = (-1)^n + n^2$

(6) $a_n = \left[\frac{n}{3}\right]$

개념2

✏ 등차수열의 일반항 a_n은 첫째항 a_1, 공차 d에 대하여 $a_n = a_1 + (n-1)d$이다.

✏ 세 수 a, b, c가 등차수열을 이루면 $2b = a + c$이다.

003.

다음 수열의 일반항과 제20항을 구하여라.3)

(1) 2, 5, 8, 11, $\cdots$

(2) -11, -6, -1, 4, $\cdots$

004.

제3항이 11, 제9항이 29인 등차수열의 20번째 항은?4)

① 60 ② 62 ③ 64
④ 66 ⑤ 68

005.

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 + a_2 = 11, \quad a_3 + a_4 + a_5 = 54$$

가 성립할 때, a_{10}의 값은?5)

① 36 ② 39 ③ 42
④ 45 ⑤ 48

006.

등차수열을 이루는 세 수의 합이 15이고, 곱이 80일 때, 세 수를 구하여라.6)

007.

세 양수 $2k-3$, k^2-1, $2k+1$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, k의 값을 구하여라.7)

개념3

✏ 첫째항 a_1, 공차 d인 등차수열의 제1항부터 제n항까지의 합 S_n은, $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$이다.

008.

다음을 구하여라.8)

(1) 등차수열 15, 13, 11, 9, ⋯에서 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 등차수열 -11, -7, -3, 1, ⋯, 41의 합

(3) 등차수열 7, $\frac{19}{3}$, $\frac{17}{3}$, 5, ⋯, 1의 합

(4) 등차수열 1, 3, 5, 7, ⋯의 첫째항부터 제n항까지의 합

009.

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6+a_{11}+a_{15}+a_{20}=32$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{25}$의 값을 구하여라.9)

010.

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=6$, $a_5=-2$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$의 값을 구하여라.10)

✏ 등차수열의 합은 (항들의 평균)×(항의 개수)이다.

✔ 항들의 평균을 일반적으로 $\dfrac{(\text{첫 항})+(\text{마지막 항})}{2}$를 이용하여 구한다.

개념4

eg1) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=10\left(\dfrac{a_1+a_{10}}{2}\right)$

eg2) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=5a_6$

011.

모든 항이 양수인 등차수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{21}$에서 홀수 번째 항들의 합을 S, 짝수 번째 항들의 합을 T라 할 때, $S:T$는?11)

① $11:10$ ② $10:11$ ③ $21:20$
④ $20:21$ ⑤ $11:21$

012.

항의 개수가 n이고, 공차가 양수인 등차수열의 홀수 번째 항의 합이 72, 짝수 번째 항의 합이 60일 때, n의 값을 구하여라.12)

013.

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \neq 0$, $\sum_{k=1}^{21} a_k = 0$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?13)

ㄱ. $a_1 a_{21} < 0$
ㄴ. $a_2 + a_{20} = 0$
ㄷ. $\sum_{k=1}^{11} a_{2k-1} = 0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

개념5

✏ 등비수열의 일반항 a_n은 첫째항 a_1, 공비 r에 대하여 $a_n = a_1 r^{n-1}$이다.

014.

등비수열 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, $\cdots$에 대하여 다음을 구하여라.14)

(1) 첫째항　　(2) 공비

(3) 일반항　　(4) 제10항

015.

제3항이 12, 제6항이 -96인 등비수열의 일반항을 구하여라.15)

016.

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_7 = 8$, $\dfrac{a_6 a_{10}}{a_5} = 24$가 성립할 때, a_{19}의 값을 구하여라.16)

017.

서로 다른 세 실수 9, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 a, 9, b는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a+b$의 값은?17)

① $-\dfrac{45}{2}$　② $-\dfrac{43}{2}$　③ $-\dfrac{41}{2}$
④ $-\dfrac{39}{2}$　⑤ $-\dfrac{37}{2}$

018.

2와 162 사이에 세 수 b_1, b_2, b_3를 넣었더니 2, b_1, b_2, b_3, 162의 순서로 등비수열을 이루었다. b_2의 값은?18)

① 12　② 18　③ 20
④ 24　⑤ 36

개념6

✏ 첫째항 a_1, 공비 $r(\neq 1)$인 등비수열의 제1항부터 제n항까지의 합은 $\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$이다.

019.

등비수열 $2,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{27},\ \cdots$의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.[19)]

020.

다항식 $x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는?[20)]

① 511 ② 512 ③ 513
④ 1023 ⑤ 1025

✏ 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n인 수열의 일반항 a_n은,
$a_n = S_n - S_{n-1}$(단, $n \geq 2$)이다.
※ $a_1 \neq S_1 - S_0$에 주의하자. $a_1 = S_1$이다.

개념7

021.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = 3^n - 3$$

일 때, a_1과 a_{10}의 값을 각각 구하여라.[21)]

022.

첫째항부터 제n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + 3n + 2$인 수열의 일반항을 구하여라.[22)]

023.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\log_3(S_n + a) = n$$

인 수열이 등비수열이 되도록 하는 상수 a의 값은?[23)]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

024.

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 + 5a_2 + 5^2a_3 + \cdots + 5^{n-1}a_n = k \cdot 3^n - 10$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.[24)]

개념8

✏ $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

025.

다음을 $\sum$ 기호 없이 표현하여라.25)

(1) $\sum_{k=1}^{15} k^2$

(2) $\sum_{k=1}^{15} (k+2)$

(3) $\sum_{k=1}^{20} k^k$

(4) $\sum_{k=1}^{n} 2k$

(5) $\sum_{k=1}^{n+1} \sqrt{k+1}$

(6) $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1}$

026.

다음을 $\sum$ 기호를 이용하여 표현하여라.26)

(1) $2+4+6+8+\cdots+20$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

(3) $1+4+7+10+\cdots+31$

(4) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+10\cdot 11$

(5) $3+3^2+\cdots+3^{10}$

(6) $1+3+3^2+\cdots+3^{10}$

(7) $1+3+5+7+\cdots+(2n+1)$

(8) $\frac{1}{2}+1+2+4+\cdots+2^n$

✏ $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}a_k$

개념9

✏ $\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}a_k$

✏ $\sum_{k=1}^{n}1=n$, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

027.

수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=20$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=10$일 때, 다음의 값을 구하여라.27)

(1) $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)$

(3) $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+4)$ (4) $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+1)$

028.

다음을 구하여라.28)

(1) $1+2+3+4+\cdots+10$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+8^3$

(4) $10+6+2+(-2)+\cdots+(-30)$

(5) $1^2+3^2+5^2+7^2\cdots+19^2$

(6) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+\cdots+12\cdot23$

029.

다음의 값을 구하여라.29)

(1) $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$

(2) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{4k^2-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

(4) $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$

✔ 이웃한 항 사이의 관계식을 점화식이라 한다.

개념10

030.

다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열의 제6항을 구하여라.[30)]

(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{k+1} = 2a_k - 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = (-1)^n a_n + n \end{cases}$

(3) $\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$

031.

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1} + a_n = 2n + 3$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하여라.[31)]

032.

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 10$이고, 수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$은 등비수열일 때, a_5의 값을 구하여라.[32)]

✔ 등차수열과 등비수열의 점화식

개념11

① $a_{n+1}-a_n=d \Rightarrow$ 등차수열

② $\dfrac{a_n+a_{n+2}}{2}=a_{n+1} \Rightarrow$ 등차수열

③ $a_{n+1}=ra_n \Rightarrow$ 등비수열

④ $a_{n+1}^2=a_na_{n+2} \Rightarrow$ 등비수열

033.

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=2$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{2^{a_2}+2^{a_4}}{2^{a_1}+2^{a_3}}$의 값은?33)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

034.

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_1=3$, $a_5=25$일 때, a_{33}의 값은?34)

① 175 ② 176 ③ 177
④ 178 ⑤ 179

035.

$a_1=1$, $a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_na_{n+2}=a_{n+1}^2$$

을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?35)

① 3^6 ② 3^7 ③ 3^8
④ 3^9 ⑤ 3^{10}

✔ 기본 점화식의 풀이

① $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 꼴

② $a_{n+1} = f(n)a_n$ 꼴

③ $a_{n+1} = pa_n + q$ 꼴

※ 교육과정이 아니지만, 이정도는 해 두자.

개념12

036.

다음과 같이 정의된 수열의 일반항을 구하여라.36)

$a_1 = 1$,
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = a_n + n$

037.

다음과 같이 정의된 수열의 일반항을 구하여라.37)

$a_1 = 1$,
$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$

038.

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?38)

① 529 ② 515 ③ 1021
④ 1027 ⑤ 2045

039.

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 5(n \geq 1)$일 때, $a_{100} - a_{99}$의 값은?39)

① $-3^{98} + 1$ ② $-3^{99} + 1$
③ -3^{99} ④ -3^{100}
⑤ $-3^{100} + 1$

✔ 수학적 귀납법의 증명 구조를 이해한다.
① $p(k)$와 $p(k+1)$을 정확하게 쓴다.
② $p(1)$과 '$p(k)$이면 $p(k+1)$이다.'를 증명한다.

개념13

040.

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.40)

041.

모든 자연수 n과 양수 h에 대하여 부등식

$$1+nh \le (1+h)^n$$

이 성립함을 증명하여라.41)

042.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고

$$na_{n+1}-2na_n+\frac{n+2}{n+1}=0 \ (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n이

$$a_n=2^n+\frac{1}{n} \ \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=1$일 때, $(*)$의 (좌변)$=a_1=3$,
(우변)$=2^1+\dfrac{1}{1}=3$이므로 성립한다.

ii) $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$a_k=2^k+\frac{1}{k}$$

이므로

$$\begin{aligned} ka_{k+1} &= 2ka_k-\frac{k+2}{k+1} \\ &= \boxed{(가)}-\frac{k+2}{k+1} \\ &= k2^{k+1}+\boxed{(나)} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\dfrac{1}{k+1}$이므로
$n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=2^n+\frac{1}{n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$이라 할 때, $f(3)\times g(4)$의 값은?42)

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

1） (1) $2n$ (2) 10^n

(3) $(-1)^{n+1}$ (4) $\dfrac{n}{n+1}$

(5) $(-1)^n n$ (6) $\sqrt{n}$

2） (1) -1，-2，-3，-4

(2) 4，1，-2，-5

(3) 0，3，8，15

(4) 6，12，24，48

(5) 0，5，8，17

(6) 0，0，1，1

3） (1) 59 (2) 84

4） ②

5） ⑤

6） 2，5，8

7） 2

8） (1) -80 (2) 210

(3) 40 (4) n^2

9） 200

10） 284

11） ①

12） 11

13） ⑤

14） (1) 2 (2) $\sqrt{2}$

(3) $2(\sqrt{2})^{n-1}$ (4) $32\sqrt{2}$

15） $3(-2)^{n-1}$

16） 216

17） ①

18） ②

19） $3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^9$

20） ④

21） 0，$3^{10}-3^9$

22） $a_n=\begin{cases}4n+1 & (n \geqq 2)\\ 7 & (n=1)\end{cases}$

23） ④

24） 10

25） (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2$

(2) $3+4+5+\cdots+17$

(3) $1^1+2^2+3^3+\cdots+20^{20}$

(4) $2+4+6+\cdots+2n$

(5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$

(6) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\cdots+\dfrac{n-1}{n}$

26) (1) $\sum_{k=1}^{10} 2k$　(2) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

(3) $\sum_{k=1}^{11} (3k-2)$　(4) $\sum_{k=1}^{10} k(k+1)$

(5) $\sum_{k=1}^{10} 3^k$　(6) $\sum_{k=1}^{11} 3^{k-1}$

(7) $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)$　(8) $\sum_{k=1}^{n+2} 2^{k-2}$

27) (1) 30　(2) 30

(3) 80　(4) 20

28) (1) 55　(2) 385

(3) 1296　(4) -110

(5) 1330　(6) 1222

29) (1) $\frac{100}{101}$　(2) $\frac{10}{21}$

(3) 2　(4) $\frac{9+\sqrt{99}}{2}$

30) (1) -61　(2) -2

(3) 13

31) 65

32) 46

33) ②

34) ⑤

35) ④

36) $\frac{n^2-n+2}{2}$

37) n^2

38) ⑤

39) ③

40) (생략)

41) (생략)

42) ⑤