# [등차수열과 등비수열]

## B29 | 수열의 일반항

개념1 수열의 용어

① 수열 : 수들의 나열

② 항 : 수열을 이루는 수들

③ 일반항 : $n$번째 항

※ 수열은 '자연수에서 실수로 가는 함수'이다.

Note $\{a_n\}$ : $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots$, $a_n$, $\cdots$

예제1 다음 수열의 일반항을 구하여라.

(1) 1, 3, 5, 7, $\cdots$

(2) 1, 4, 9, 16, $\cdots$

(3) 1, $-1$, 1, $-1$, $\cdots$

(4) 0, 2, 0, 4, 0, 6, $\cdots$

(5) 2, 2, 4, 4, 6, 6, $\cdots$

(6) 9, 99, 999, 9999, $\cdots$

(7) 7, 77, 777, 7777, $\cdots$

(8) 12, 1212, 121212, 12121212, $\cdots$

# B29E1 | 일반항의 연산

예제1 수열 $\{a_n\}: 1, 3, 5, 7, 9, \cdots, 2n-1, \cdots$에 대하여,

다음 수열을 나열하고 일반항을 구하여라.

(1) $\{a_{2n}\}$

(2) $\{a_{n+1}\}$

(3) $\{3a_n\}$

(4) $\{a_n^2\}$

(5) $\{a_{n+1}-a_n\}$

(6) $\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$

# B30 | 등차수열의 일반항

탐구 수열 2, 5, 8, 11, $\cdots$의 일반항을 구하여라.

개념1 첫째항이 $a_1$, 공차가 $d$인 등차수열의 일반항은 $a_n=a_1+(n-1)d$이다.

✓ $n$에 대한 일차식 $an+b$꼴 (공차 $a$)

✓ 등차수열은 정보 두 개에 의해 결정된다.

예제1 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=4$, $a_6=24$일 때, $a_{12}$의 값을 구하여라.

예제2 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4=11$, $a_2 : a_5=1:5$일 때,

$a_k=63$이다. 자연수 $k$의 값을 구하여라.

## B30E1 | 등차중항

**개념1** 등차수열에 대한 다음의 사실들을 확인하여라.

① 세 수 $a$, $b$, $c$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $\Rightarrow 2b=a+c$

② 수열 $\{a_n\}$이 등차수열일 때,

$\Rightarrow a_2+a_4=2a_3$

$\Rightarrow a_4+a_7+a_{10}=3a_7$

$\Rightarrow a_4+a_6+a_8+a_{10}=4a_7$

$\Rightarrow a_4+a_5+a_9+a_{10}=4a_7$

③ 세 수가 등차수열을 이룬다. $\Rightarrow a-d$, $a$, $a+d$

④ 네 수가 등차수열을 이룬다. $\Rightarrow a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$

**예제1** 세 수 $a$, $b$, $c$는 이 순서대로 등차수열을 이루며 그 합은 9이고, 제곱의 합은 59이다. $b^2-ac$의 값을 구하여라.

## B31 | 등차수열의 합

**탐구** 다음을 구하여라.

(1) $2+5+8+11+14$

(2) $2+4+6+8+10+12$

개념1 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$이면, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

✓ 등차수열의 합은 (항들의 평균)×(항의 개수)이다.

eg) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = 5a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} \cdot 5 = \frac{a_1 + a_3 + a_5}{3} \cdot 5$

✓ 등차수열의 합 ⇔ $an^2 + bn$ (공차 $2a$, 첫째항 $a+b$)

eg) $S_n = 2n^2 + 3n$이면, ① 등차임, ② 공차 4, ③ 첫째항 5, ④ 일반항 $4n+1$

예제1 $a_1 > 0$인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합이 $S_n$일 때,

$S_{10} = S_{20}$이 성립한다. $S_n$이 최대가 되는 자연수 $n$의 값을 구하여라.

예제2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하자.

$|a_7| = |a_{10}|$, $S_n = -n^2 + an$일 때, 상수 $a$의 값을 구하여라.

# B32 | 합과 일반항

개념1 $a_n = \begin{cases} S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \\ S_1 & (n = 1) \end{cases}$

✓ $S_n$을 알면 $a_n$을 알 수 있다.

예제1 다음을 만족시키는 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $S_n = n^2 + n$

(2) $S_n = n^2 + 2n + 3$

(3) $S_n = 2a_n - 4$

(4) $\sum_{k=1}^{n} ka_k = n^2 - n$

(5) $(a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots + (a_n)^2 = 2^n - 1$

# B33 | 등비수열의 일반항

탐구 수열 3, 6, 12, 24, $\cdots$의 일반항을 구하여라.

개념1 첫째항이 $a_1$, 공비가 $r$인 등비수열의 일반항은 $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$이다.

예제1 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = -32$, $a_5 = 4$일 때, $a_7$의 값을 구하여라.

예제2 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 12$, $a_3 + a_4 = 48$일 때,

$a_1$의 값을 구하여라. (단, $r > 0$)

✓ $a_n = a \cdot b^n$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $ab$, 공비가 $r$인 등비수열이다.

eg) $\{x(x+1)^n\}$ $\Rightarrow$ 첫째항과 공비?

# B33E1 | 등비중항

개념1 등비수열에 대한 다음의 사실들을 확인하여라.

① 세 수 $a$, $b$, $c$가 순서대로 등비수열 $\Rightarrow b^2 = ac$

$\Rightarrow b = \sqrt{ac}$ 또는 $b = -\sqrt{ac}$

$\Rightarrow$ 두 점 $(1, a)$와 $(3, c)$를 모두 지나는 직선과 지수함수 $\Rightarrow$ 산술평균과 기하평균

② 세 수가 등비수열을 이룬다. $\Rightarrow \dfrac{a}{r}$, $a$, $ar$

예제1 방정식 $3x^3 + 8x^2 - 7x - k = 0$의 서로 다른 세 실근이 등비수열을 이룰 때,

상수 $k$의 값을 구하여라.

# B34 | 등비수열의 합

개념1 첫째항이 $a_1$, 공비가 $r$인 등비수열 $\{a_n\}$의

첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면 $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

증명 $S - rS$에서

✓ $(r^n - 1) = (r-1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1)$임을 확인해보자.

eg) $S_3 = a_1 + a_1 r + a_2 r^2$

**예제1** 다음을 구하여라.

(1) $1+2+4+\cdots+1024$ (2) $2+4+8+\cdots+1024$

(3) $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{128}$ (4) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots-\frac{1}{128}$

**예제2** 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 할 때,

$S_{10}=4$, $S_{20}=32$이다. $S_{30}$의 값을 구하여라.

**예제3** 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 할 때,

$S_n=20$, $S_{2n}=60$이다. $S_{3n}$의 값을 구하여라.

# B34E1 | 원리합계

**개념1** 원리합계를 푸는 요령들

① 이자 붙이는 방법 : '이자 10%면 1.1배', '이자 5%면 1.05배' $\Rightarrow$ $r$로 놓는다.

② 이자는 기간에 붙는다. $\Rightarrow$ 월초/월말 고민할 필요 없음.

③ 시간의 흐름에 따른 돈의 가치 변화 : 뒤로 가면 $r$배, 앞으로 가면 $\frac{1}{r}$배

**예제1** 중학교 1학년 때부터 연이율 8%의 복리로 매년 초에 100000원씩

적립한다. 고등학교를 졸업할 때의 적립총액은 얼마인지 구하여라.

($1.08^6 \fallingdotseq 1.59$로 계산한다.)

**예제2** 이달 초에 가격이 120만원인 TV를 할부로 구입하고 이달 말부터

일정한 금액을 12회로 나누어 갚는다면 매달 얼마씩 갚아야 하는지 구하여라.

(월이율 1% 복리, $1.01^{12}=1.1$)

**예제3** 올해부터 매년 초에 1000만원씩 10년간 지급되는 연금이 있다.

이 연금을 현재 시점에 한 번에 모두 받는다면 얼마를 받아야 하는지 구하여라.

(단, 연이율 15%, $1.15^{10}=4$)

**예제4** 200만원인 노트북을 구입하는데 100만원은 구입시 현금으로 지불하고

나머지 100만원은 할부로 지급하기로 하였다. 구입한 후 1개월 후부터

매달 일정한 금액씩 12회에 나누어 갚는다면 매달 얼마씩 갚아야 하는지

구하여라. (단, 월이율 1%, $1.01^{12}=1.1$)

**예제5** 정부가 통일 비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2001년부터

매년 1월 1일 적립한다고 하자. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여

매년 전년도보다 6%씩 증액한다. 2001년 1월 1일부터 10조원을 적립하기

시작한다면 2010년 12월 31일까지 적립된 금액은 몇 조원인지 구하여라.

(단, 연이율 6%, 1년마다의 복리로 계산하고, $(1.06)^{10}=1.8$)

# [수열의 합]

## B35 | 시그마의 뜻과 성질

Note $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

예제1 다음을 $\sum$를 이용하여 나타내어라.

(1) $1+3+5+\cdots+19$

(2) $3+3^2+3^3+\cdots+3^{10}$

(3) $1+3+3^2+\cdots+3^{10}$

(4) $1\cdot 10+2\cdot 9+3\cdot 8+\cdots+10\cdot 1$

(5) $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

(6) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$

(7) $1+3+3^2+\cdots+3^{n+1}$

예제2 $\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{100}{3^k}\right]$의 값을 구하여라.

개념1 시그마의 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

② $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

③ $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$

증명 개 당연한데 뭔 증명이야.

✓ $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_l = \sum_{m=1}^{n} a_m$

✓ $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{k+m-1}$

※ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$나 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$는 어떻게 처리할 수 없다.

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k$ 하지 마세요. 속 터집니다..

**예제1** 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 15$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 20$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k)$의 값을 구하여라.

**예제2** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 20$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^{\ 2} = 30$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k - 2)^2$의 값을 구하여라.

# B35E1 | 계차수열

**탐구** 수열 1, 3, 7, 13, 21, 31, $\cdots$의 일반항을 구하여라.

**개념1** $\{a_n\}$의 계차수열이 $\{b_n\}$이다. $\Rightarrow$ $\{b_n\} = \{a_{n+1} - a_n\}$

$\Rightarrow$ $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

예제1 다음 수열의 일반항을 구하여라.

(1) 1, 3, 7, 13, 21, 31, ⋯

(2) 1, 3, 7, 15, 31, 63, ⋯

# B36 | 시그마의 풀이1 (다항식)

개념1 다음이 성립한다.

① $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

✓ $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

증명 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$에 축차대입해보자.

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10} (k^2 + 2k + 3)$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (2k^2 - 4)$

(3) $\sum_{k=1}^{6} (k+4)^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} k$

(5) $\sum_{k=1}^{2n} k^2$

(6) $\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{k} l\right)$

# B37 | 시그마의 풀이2 (망원급수)

**개념1** 부분분수 변형 : $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

**예제1** 다음을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

(3) $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+2)}$ (4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(5) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

**예제2** $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(n-1)!}$을 간단히 하여라.

**예제2** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 2인 등차수열이다.
$\sum_{k=1}^{10}a_ka_{k+1}$의 값을 구하여라.

# B38 | 시그마의 풀이3 (등비급수/멱급수)

**예제1** 다음을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{9}3^{k+1}$ (2) $\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)$ (4) $\sum_{k=1}^{10}(2^{k-1}-k)$

개념1 멱급수 : $S-rS$를 구한다.

예제1 다음을 계산하여라.

(1) $1 \cdot 1+2 \cdot 2+3 \cdot 2^2+\cdots+10 \cdot 2^9$

(2) $1 \cdot 1+3 \cdot 3+5 \cdot 3^2+\cdots+19 \cdot 3^9$

# B39 | 군수열

✓ 군수열 문제는 다음에 신경 쓰면서 알아서 푼다.

① '$k$군 $l$항'을 '$n$항'으로 변환하는 방법

② 각 군의 항수들을 합하면 어떻게 되는지 ($n$군까지 총 몇 항인지?)

③ 각 군의 첫째항들이 어떤 수열을 이루는지

예제1 수열 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \cdots$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 12군의 7항은 무엇인가?

(2) $\frac{4}{5}$는 몇 군의 몇 항인가?

(3) $\frac{6}{5}$는 몇 번째 항인가?

(4) 제30항은 무엇인가?

**예제2** 수를 $(1)$, $(3,\ 5)$, $(7,\ 9,\ 11)$, $(13,\ 15,\ 17,\ 19)$와 같이 나열할 때,

(1) $n$번째 괄호의 첫 번째 수를 구하여라.

(2) $11$번째 괄호 안의 모든 숫자의 합을 구하여라.

**예제3** 수열 $1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 3,\ 5,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 1,\ \cdots$의

첫째항부터 제$120$항까지의 합을 구하여라.

# [수학적 귀납법]

## B40 | 점화식과 수열의 귀납적 정의

개념1 점화식 : 수열의 이웃한 항 사이의 관계식

✓ $a_{n-1}$ : $a_n$의 바로 전 항, $a_{n+1}$ : $a_n$의 바로 다음 항

eg1) 등차수열 : $a_{n+1}-a_n=d$

eg2) $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1} \Rightarrow$ 등비수열?

eg3) $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \cdots$ : 피보나치 수열 : $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

개념2 수열의 귀납적 정의 :

항들의 일부와 점화식을 이용하여 수열을 정의하는 방법.

eg1) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=a_n+n \end{cases}$ 일 때 $\{a_n\}$을 나열하여라.

eg2) $\begin{cases} a_1=1,\ a_2=2 \\ a_{n+1}=a_n+a_{n-1} \end{cases}$ 일 때 $\{a_n\}$을 나열하여라.

# B41 | 점화식의 풀이1 (계차/계비)

개념1 $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴 점화식 : 축차대입으로 푼다.

$\Rightarrow a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

개념2 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 꼴 점화식 : 축차대입으로 푼다.

$\Rightarrow a_n=f(1)f(2)\cdots f(n-1)\cdot a_1$

예제1 다음과 같이 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1=0,\quad a_{n+1}-a_n=2n+3$

(2) $a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+2^n$

(3) $a_1=\frac{1}{2},\quad a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ (단, $n\geq 2$)

# B42 | 점화식의 풀이2 (일차 이항점화식)

개념1 $a_{n+1}=pa_n+q$ 꼴 점화식 : $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 만든다.

$\Rightarrow a_n=p^{n-1}(a_1-\alpha)+\alpha$

**예제1** 다음과 같이 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1=8,\quad a_{n+1}=3a_n-4$

(2) $a_1=9,\quad a_{n+1}=2a_n+5$

**예제2** $a_1=1,\ pa_{n+1}=qa_n+1$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. $p=q$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

ㄴ. $p\neq q$일 때, 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 등비수열이다.

ㄷ. $-1<\dfrac{q}{p}<1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

# B43 | 점화식의 풀이3 (기타)

※ 점화식의 풀이가 교육과정 안에 있는가? ⇒ No

기본적인 점화식은 다룰 줄 알아야 하는가? ⇒ Yes

기타 점화식은 어떻게 할까? ⇒ 일단 한 번 해보고 넘어가.

**개념1** 기타 점화식의 풀이

① $S_n$ 들어간 점화식 : $a_n=S_n-S_{n-1}$을 이용한다.

② $a_{n+1}=pa_n+q^n$ 꼴의 점화식 : 양 변을 $p^{n+1}$ 또는 $q^{n+1}$으로 나눈다.

③ $pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$ (단, $p+q+r=0$) 꼴 : $a_{n+2}-a_{n+1}=k(a_{n+1}-a_n)$꼴로.

④ 기타 치환각이 잡히는 꼴

예제1 다음과 같이 정의된 수열의 일반항을 구하여라.

(1) $a_1=1,\quad 2S_n=a_{n+1}-1$

(2) $a_1=1,\quad S_n=(n+2)a_n$

(3) $a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2^n$

(4) $a_1=1,\ a_2=3,\quad a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

(5) $a_1=2,\quad na_{n+1}=(n+1)a_n+1$

(6) $a_1=1,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$

(7) $a_1=1,\quad a_na_{n+1}=a_n-3a_{n+1}$

(8) $a_1=3,\quad a_{n+1}=3a_n^2$

# B44 | 수학적 귀납법

개념1 수학적 귀납법 : 다음을 이용하여 $p(n)$을 증명할 수 있다.

i ) $p(1)$

ii ) $p(k)$가 참이면 $p(k+1)$이 참이다.

예제1 다음을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하여라.

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $(1+a)^n\geq 1+an$ (단, $a>0$)

(3) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=2a_n+1 \end{cases}$ 일 때 $a_n=2^n-1$이다.