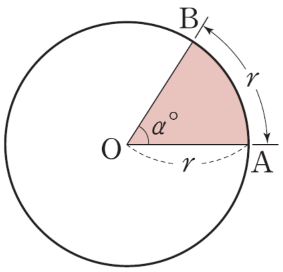
[삼각함수]

B18 | 호도법과 일반각

개념1 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호의 길이를 각으로 읽는 방법을 호도법이라 한다.

단위로 rad를 쓴다. $180^\circ = \pi(\text{rad})$이다.



1라디안(rad)

※ 이후 단위가 없는 각은 라디안을 의미한다. 즉, $\theta = \theta(rad)$이다.

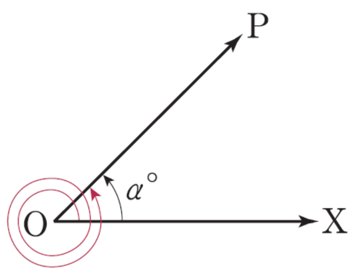
예제1 다음 각을 60분법은 호도법으로, 호도법은 60분법으로 고쳐라.

(1) 60°	(2) 90°	(3) 360°
(4) $\dfrac{\pi}{4}$	(5) $\dfrac{2}{3}\pi$	(6) $\dfrac{\pi}{6}$

개념2 원점에서 시작하는 점 P를 지나는 반직선을 동경 $\overrightarrow{\text{OP}}$이라 하고,

x축의 양의 방향 $\overrightarrow{\text{OX}}$에서 동경까지 반시계방향으로 잰 각을 동경이 나타내는 각이라 한다.

개념3 동경 $\overrightarrow{\text{OP}}$가 나타내는 각 중 하나를 α라고 할 때, $\theta = 2n\pi + \alpha$ (단, n은 정수)로 표시되는 각 θ를 동경 $\overrightarrow{\text{OP}}$가 나타내는 일반각이라고 한다.



※ 여러 개의 각이 하나의 동경을 나타낼 수 있다.

예제2 다음의 각을 나타내는 동경은 몇 사분면에 존재하는지 말하여라.

(1) 75°	(2) 210°	(3) $-\dfrac{\pi}{4}$
(4) $-\dfrac{2}{3}\pi$	(5) $\dfrac{20}{3}\pi$	(6) $-\dfrac{7}{4}\pi$

예제3 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 다음 점을 지날 때, 동경이 나타내는 각을 구하여라.

(1) $(1,\ \sqrt{3})$	(2) $(-1,\ \sqrt{3})$	(3) $(1,\ -1)$
(4) $(3,\ -\sqrt{3})$	(5) $(-4,\ 4)$	(6) $(0,\ 10)$

B18E1 | 일반각의 연산

✓ 동경을 나타내는 각은 일반각을 생각해야 한다.

eg1) θ가 제1사분면의 각일 때, $\dfrac{\theta}{2}$가 나타내는 동경이 존재하는 영역은?

eg2) θ가 제4사분면의 각일 때, $\dfrac{\theta}{3}$가 나타내는 동경이 존재하는 영역은?

개념1 두 각 α, β에 대하여

① 두 동경이 일치할 조건 : $\alpha-\beta=2n\pi$ (n은 정수)

② 두 동경이 원점 대칭일 조건 : $\alpha-\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

③ 두 동경이 x축에 대하여 대칭일 조건 : $\alpha+\beta=2n\pi$ (n은 정수)

④ 두 동경이 y축에 대하여 대칭일 조건 : $\alpha+\beta=(2n+1)\pi$ (n은 정수)

⑤ 두 동경이 $y=x$에 대하여 대칭일 조건 : $\alpha+\beta=\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ (n은 정수)

예제1 다음을 만족시키는 각 θ의 크기를 구하여라.

(1) 각 θ와 5θ를 나타내는 두 동경이 일치한다.

(2) 각 θ와 각 7θ를 나타내는 두 동경이 원점 대칭이다.

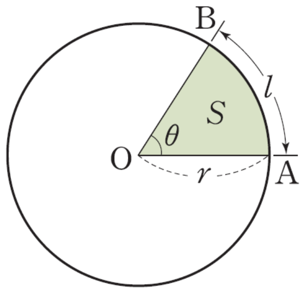
(3) 각 θ와 각 3θ를 나타내는 두 동경이 y축에 대하여 대칭이다.

B19 | 부채꼴

개념1 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의

① 호의 길이는 $l=r\theta$이다.

② 넓이는 $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r^2\theta$이다.



예제1 호의 길이가 4π이고 중심각의 크기가 $\frac{1}{3}\pi$인 부채꼴의 반지름의 길이와 넓이를 각각 구하여라.

예제2 둘레의 길이가 16인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 중심각의 크기와 반지름의 길이, 호의 길이, 부채꼴의 넓이를 각각 구하여라.

B20 | 삼각함수의 정의

개념1 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각이 θ일 때,

① $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, ② $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, ③ $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$와 같이 정의한다.

※ ④ $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$, ⑤ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, ⑥ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$도 상식으로.

※ 삼각비와 삼각함수의 차이 : 삼각함수는 모든 각에서 정의됨.

예제1 원점과 점 $\mathrm{P}(-4,\ 3)$에 대하여 동경 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 나타내는 각을

θ라고 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 각각 구하여라.

예제2 다음을 구하여라.

(1) $\cos 120^\circ$ (2) $\cos(-30^\circ)$ (3) $\tan\dfrac{5}{6}\pi$

(4) $\sin\dfrac{4}{3}\pi$ (5) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ (6) $\sin\dfrac{\pi}{2}$

※ 특수각의 삼각비

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	정의X

B20E1 | 삼각함수의 부호

개념1 동경이 몇사분면에 있는지에 따른 삼각함수의 부호는,

	1	2	3	4
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

예제1 $\sin\theta\cos\theta>0$와 $\cos\theta\tan\theta<0$가 되는 θ는 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

예제2 θ가 제2사분면의 각일 때, $\cos\theta+|\cos\theta|+\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta}$를 간단히 하여라.

B21 | 삼각함수 사이의 관계

개념1 임의의 실수 θ에 대하여 다음이 성립한다.

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

② $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

예제1 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$이고 θ가 제2사분면의 각일 때, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

예제2 θ가 제3사분면의 각이고 $\sin\theta=-\frac{12}{13}$일 때, $\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}$의 값을 구하여라.

예제3 다음을 간단히 하여라.

(1) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

(3) $\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta-\cos^3\theta}$ (4) $\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}+\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$

예제4 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{7}{5}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ (4) $\sin\theta-\cos\theta$

(5) $\sin\theta$ (6) $\tan\theta$

B22 | 여각 변환

개념1 $\frac{n\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수 꼴은 아래와 같이 처리할 수 있다.

①
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\begin{cases}\boxed{\pm}\sin\theta\ (n\text{이 짝수}) \\ \boxed{\pm}\cos\theta\ (n\text{이 홀수})\end{cases} \\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\begin{cases}\boxed{\pm}\cos\theta\ (n\text{이 짝수}) \\ \boxed{\pm}\sin\theta\ (n\text{이 홀수})\end{cases} \\ \tan\left(\frac{n\pi}{2}\pm\theta\right)=\begin{cases}\boxed{\pm}\tan\theta\ (n\text{이 짝수}) \\ \boxed{\pm}\frac{1}{\tan\theta}\ (n\text{이 홀수})\end{cases} \end{cases}$$

② θ를 예각으로 가정하고, 원 삼각함수의 부호를 따라 부호를 정해준다.

※ 여각 변환 표다. 몇 개 골라서 확인해보자.

$2n\pi \pm \theta$의 삼각함수	$\pi \pm \theta$의 삼각함수	$\frac{\pi}{2} \pm \theta$의 삼각함수
① $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$	⑦ $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$	⑬ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
② $\sin(2n\pi-\theta)=-\sin\theta$	⑧ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$	⑭ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
③ $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$	⑨ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$	⑮ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
④ $\cos(2n\pi-\theta)=\cos\theta$	⑩ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$	⑯ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
⑤ $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$	⑪ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	⑰ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$
⑥ $\tan(2n\pi-\theta)=-\tan\theta$	⑫ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$	⑱ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

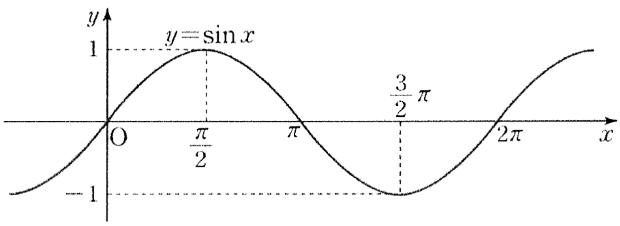
B23 | 삼각함수의 그래프

개념1 $y=\sin x$의 그래프

① 주기는 2π이다.

② 치역은 $\{y|-1 \le y \le 1\}$이다.

③ 그래프는 원점 대칭이다.

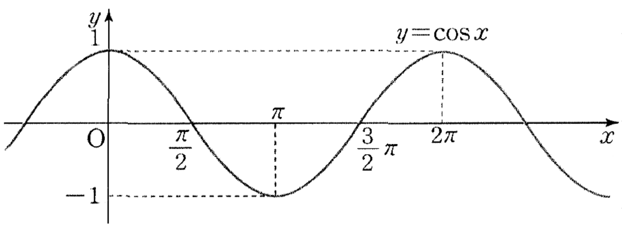


개념2 $y=\cos x$의 그래프

① 주기는 2π이다.

② 치역은 $\{y|-1 \le y \le 1\}$이다.

③ 그래프는 y축 대칭이다.



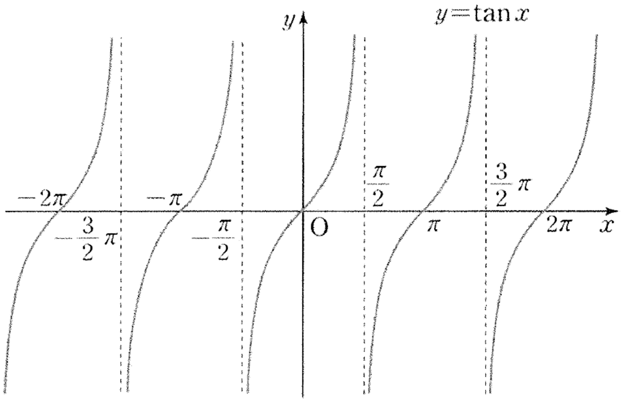
개념3 $y=\tan x$의 그래프

① 주기는 π이다.

② 치역은 실수 전체의 집합이다.

③ 점근선은 $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$이다.

④ 그래프는 원점 대칭이다.



B23E1 | 삼각함수 그래프의 변형

개념1 삼각함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프

① y축 방향으로 a배 확대 ($\Rightarrow$ 최대 $|a|$, 최소 $-|a|$)

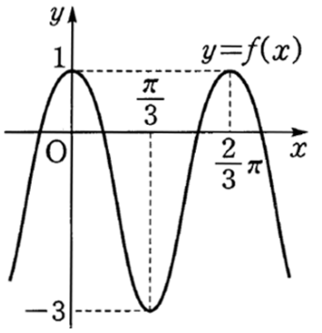
② x축 방향으로 b배 축소 ($\Rightarrow$ 주기 $\dfrac{2\pi}{|b|}$)

③ $(p,\ d)$ 평행이동 ($\Rightarrow$ 최대 $|a|+d$, 최소 $-|a|+d$)

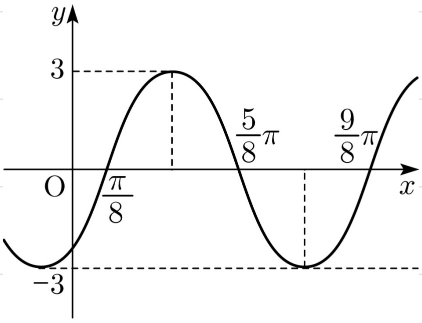
예제1 함수 $y=3\sin 4x+5$의 그래프의 최대/최소/주기를 구하여라.

예제2 함수 $y=a\sin bx+c(a>0,\ b>0)$의 최댓값이 4, 최솟값이 -2이고, 주기가 $\dfrac{4}{3}\pi$일 때, a, b, c의 값을 구하여라.

예제3 함수 $y=a\cos bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b, c의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)



예제4 함수 $y=a\sin(bx-c)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, a, b, c의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$, $0<c<\frac{\pi}{2}$)



B23E2 | 함수의 주기성

개념1 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, $f(x)$를 주기함수라 하고 이러한 p 중에서 최소인 양수를 주기라 한다.

※ 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이면 함수 $f(x)$의 주기는 2인가? (ㄴㄴ)

예제1 함수 $f(x)$가 $0\le x\le 2$에서 $f(x)=|x-1|$이고 임의의 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시킬 때, $y=f(x)$의 그래프를 그려라.

B24 | 삼각방정식/삼각부등식

✓ 그래프를 그려두고 그래프 상에서 잘 찾는다.

예제1 $0 \le x \le 2\pi$일 때, 다음 방정식/부등식을 풀어라.

(1) $\sin x = \frac{1}{2}$ (2) $\cos x = -\frac{1}{2}$

(3) $\tan x = \sqrt{3}$ (4) $\sin x < -\frac{1}{2}$

(5) $\cos x \le -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (6) $2\cos x - \sqrt{2} > 0$

예제2 $0 \le x \le 2\pi$일 때, 다음 방정식을 풀어라.

(1) $\tan x = 2\sin x$ (2) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

(3) $2\cos^2 x + \sin x = 1$ (4) $3 - 2\cos^2 x - 3\sin x = 0$

예제3 $0 \le x \le 2\pi$에서 $\sin 2x = \frac{1}{3}$의 모든 근의 합을 구하여라.

B25 | 삼각함수의 치환

✓ $\sin\theta$나 $\cos\theta$를 치환하면 그 치환한 값의 범위는 -1 이상 1 이하이다.

✓ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 이용하여 $\sin^2\theta$나 $\cos^2\theta$값을 반대쪽으로 바꿔줄 수 있다.

예제1 $y=2\sin^2 x-2\cos x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

예제2 함수 $y=\dfrac{-\sin x+2}{\sin x+3}$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

B26 | 사인법칙

개념1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때,

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$이 성립한다.

증명1 외접원에서 원주각으로 지름을 지나게 옮긴다.

증명2 수선 내리고 그 길이를 양쪽에서 본다.

B27 | 코사인법칙

개념1 삼각형 ABC에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이 성립하고,

이를 코사인법칙 혹은 제2코사인법칙이라 한다.

증명 수선을 내려서 피타고라스 두 번 때린다.

※ 상황별로 어떤 공식을 꺼내야 할지를 생각해보면,

① 사인법칙은 ASA가 주어진 삼각형의 나머지 두 변을 결정해준다.

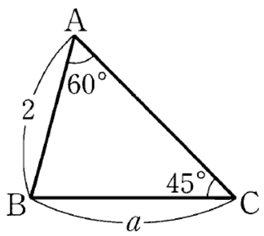
② 사인법칙은 외접원의 반지름의 길이를 결정해준다.

③ 코사인법칙은 SAS가 주어진 삼각형의 나머지 한 변을 결정해준다.

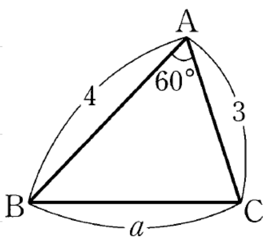
④ 코사인법칙은 SSS가 주어진 삼각형의 세 각을 결정해준다.

예제1 다음 삼각형 ABC에서 a의 값을 구하여라.

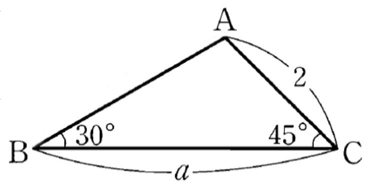
(1)



(2)



(3)



B28 | 삼각형의 넓이

개념1 삼각형 ABC의 두 변의 길이가 a, b이고 두 변의 끼인 각이 θ이면

삼각형 ABC의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$이다.

예제1 $b=4$, $c=2\sqrt{3}$, $\angle A=60°$인 $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.

예제2 $a=5$, $b=8$, $\angle C=135°$인 $\triangle ABC$의 넓이를 구하여라.