[지수와 로그]

B01 | 거듭제곱근

탐구 '제곱근 3'과 '3의 제곱근'에 대하여 설명하여라.

개념1 a의 n제곱근 : n번 거듭제곱하면 a가 되는 수 $\Rightarrow$ $x^n=a$의 근

개념2 $\sqrt[n]{a}$: a의 n제곱근 중 a와 부호가 같은 것

eg1) 16의 네제곱근은 2, -2, $2i$, $-2i$의 네 개다. cf) $\sqrt[4]{16}=2$

eg2) -8의 세제곱근은 -2, $1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$의 세 개다. cf) $\sqrt[3]{-8}=-2$

✓ n이 홀수이고 a가 양수일 때, $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$이다.

✓ n이 홀수이면 $\sqrt[n]{a^n}=a$, n이 짝수이면 $\sqrt[n]{a^n}=|a|$이다.

B02 | 거듭제곱근의 개수

개념1 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 아래 표와 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	2개	1개	0개
n이 홀수	1개	1개	1개

✓ 복소수 범위에서 n제곱근은 항상 n개 $\Rightarrow$ 시험에 안 나옴요.

예제1 3의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 m, -5의 세제곱근 중

실수인 것의 개수를 n이라 할 때, $m+n$의 값을 구하여라.

예제2 $P(n,\ a)$를 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수라 하자.

$P(3,\ 100)+P(4,\ 100)+P(5,\ -4)+P(6,\ -20)$의 값을 구하여라.

예제3 함수 $f(n)$을 $x^n=5-n$의 실근의 개수라 할 때,

$f(3)+f(6)+f(9)$의 값을 구하여라.

B03 | 거듭제곱근의 연산

✓ 뭐 여러 가지 성질 있는데, 그냥 지수 확장해서 다루면 된다.

$\Rightarrow$ 지수 단원을 뗀 후에 다시 와서 증명해보도록 하자.

B04 | 지수의 확장

개념1 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ ($a\neq 0$일 때 정의한다.)

개념2 $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ ($a>0$일 때 정의한다.)

※ 유리수 지수를 양수 밑에만 정의하는 이유를 확인하여라.

예제1 다음을 간단히 하여라.

(1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{3^{-1}}}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}}$ (4) $\sqrt{\dfrac{2^2}{2^3}}$

B05 | 지수의 연산

개념1 지수법칙이 여전히 잘 성립한다.

① $a^pa^q=a^{p+q}$ ② $(a^p)^q=a^{pq}$ ③ $(ab)^p=a^pb^p$

예제1 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}$ (2) $\sqrt{a\sqrt{a}}$

(3) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}$ (4) $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[4]{a^2}$

예제2 실수 a에 대하여 $3^a=2$일 때, $27^a+4\cdot 9^{-a}$의 값을 구하여라.

예제3 실수 x, y에 대하여 $8^x=2^y=a$이고 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$일 때,

양수 a의 값을 구하여라.

예제4 $2^x=7$, $7^{\frac{y}{2}}=16$인 실수 x, y에 대하여 xy의 값을 구하여라.

예제5 $5^x=10$, $80^y=10$, $a^z=10$을 만족시키는 세 실수 x, y, z에 대하여,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=2$일 때 양수 a의 값을 구하여라.

✓ 소수의 유리수승이 유리수가 되려면 지수가 정수여야 한다.

예제6 $2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이

어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하여라.

예제7 100 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 수 $\sqrt[3]{\frac{3^{b+1}}{2^a}}$과 $\sqrt[5]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}$이

모두 유리수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

예제8 10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 $\left(\frac{1}{32}\right)^{a-\frac{1}{2}b}$이

자연수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하여라.

B05E1 | 크기 비교

✓ 지수를 잘 통일해본다. (통분하거나 공통인수 묶기)

✓ a, b, p가 양수이면 $a^p > b^p \Leftrightarrow a > b$ ($y = x^p$는 증가함수이다.)

예제1 다음의 수들의 크기를 비교하여라.

(1) $2^{\frac{1}{2}}$과 $3^{\frac{1}{3}}$

(2) 2^{33}과 3^{22}

(3) $A = \sqrt{5}$, $B = \sqrt[3]{11}$, $C = \sqrt[3]{\sqrt{120}}$

B05E2 | 역수 표현

예제1 1이 아닌 양수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5$일 때,
$x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$의 값을 구하여라.

예제2 $x + x^{-1} = 3$일 때, $x^2 - x^{-2}$의 값을 구하여라. (단, $x > 1$)

예제3 $3^{x-1} + 3^{-x} = 4$일 때, $\dfrac{3^{3x}}{27} + \dfrac{1}{3^{3x}}$의 값을 구하여라.

B06 | 로그의 정의

개념1 $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

※ $\log_a b$에서 a를 로그의 밑, b를 로그의 진수라 한다.

eg1) $2^x = 8 \Rightarrow x = \log_2 8 = 3$

eg2) $2^x = 12 \Rightarrow x = \log_2 12 = 3.xx$

eg3) $2^x = 16 \Rightarrow x = \log_2 16 = 4$

B06E1 | 로그가 정의되는 조건

※ $a^x = b$에서 $a < 0$이면 함수가 거지가 된다.

$a = 1$이면 x값은 부정, $b = 1$이다.

$\Rightarrow$ 로그의 밑은 1이 아닌 양수일 때만을 취급한다.

$\Rightarrow$ 따라서 $b > 0$

개념1 $\log_a b$가 정의되려면,

① $a > 0$, ② $a \neq 1$, ③ $b > 0$

예제1 $\log_{a-2}(x^2 + ax + 2a)$의 값이 모든 실수 x에 대하여

정의되도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

B07 | 로그의 연산

개념1 로그에 대하여 다음이 성립한다.

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a b^n=n\log_a b$, $\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b$

③ $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$, $\log_a b-\log_a c=\log_a \dfrac{b}{c}$

④ $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

⑤ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$, $a^{k\log_b c}=c^{k\log_b a}$

증명 예의상 증명 한 번씩은 해 봐 주세요.

예제1 다음을 간단히 하여라.

(1) $\log_5 5\sqrt{5}$

(2) $\log_9 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\log_2 12-\log_4 \dfrac{9}{2}$

(4) $\log_{10}\dfrac{1}{4}-\log_{10}9-2\log_{10}\dfrac{5}{3}$

(5) $\log_2 9\cdot\log_3\sqrt{2}$

(6) $2\log_3 2\sqrt{3}-\dfrac{1}{\log_2 3}-\dfrac{2}{\log_{\sqrt{6}}3}$

(7) $(\sqrt{2})^{\log_2 25}$

(8) $2^{8\log_4\sqrt{5}}$

예제2 다음 물음에 답하여라.

(1) $2^x=3$, $3^y=4$를 만족시키는 x, y에 대하여 xy의 값을 구하여라.

(2) $k^4=5$, $16=5^l$일 때, k^l의 값을 구하여라.

(3) $2^x=3^y=6^z$일 때, $\dfrac{(x+y)z}{xy}$의 값을 구하여라.

B07E1 | 로그의 밑 변환

개념1 $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$

※ $x^a = b \Rightarrow x = b^{\frac{1}{a}}$

eg1) 1시간에 3배가 된다. 몇 시간만에 30배가 되는가?

eg2) 5년에 10배가 된다. 1년에는 몇 배가 되는가?

eg3) 10년간 절반이 된다. 몇 년만에 20%가 되는가?

✓ 계산이 잘 안 되면 일단 밑을 통일해본다.

예제1 $\log_4 3 + \log_2 5 + 1$을 간단히 하여라.

예제2 $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$일 때, $\log_{14} 21$을 a, b로 나타내어라.

B08 | 로그가 포함된 식

✓ 잘 집어넣고 정리한다.

예제1 어떤 컵에 물을 부은 지 x분 후 이 컵 속의 물의 온도를 y℃라 하면

$$y = a \cdot b^{-x} \ (a,\ b\text{는 상수})$$

인 관계가 성립한다고 한다. 이 컵 속의 물의 온도가 5분 후, 10분 후에 각각 50℃, 40℃라고 할 때, 15분 후의 물의 온도를 구하여라.

예제2 지진의 규모 R과 지진이 일어날 때 방출되는 에너지 E 사이에는

$$R = 0.67\log(0.37E) + 1.46$$

의 관계가 있다고 한다. 지진의 규모가 6.15일 때 방출되는 에너지를 E_1, 지진의 규모가 5.48일 때 방출되는 에너지를 E_2라 할 때, $\dfrac{E_1}{E_2}$의 값을 구하여라.

B08E1 | 기하급수적 증감

✓ 기하급수적 : 일정한 간격에 일정한 비율로

⇒ 시간마다 r배로 증가하면 t시간 동안 r^t배로 증가하게 된다.

예제1 정부에서는 담배 가격을 인상하려고 한다. 매년 바로 이전 연도 보다 15%씩 올리기로 한다면, 현재 가격의 세 배 이상이 되는 것은 지금부터 몇 년 후인지 구하여라. (단, $\log_{10}1.15 = 0.0607$, $\log_{10}3 = 0.4771$)

예제2 가입자가 1년 동안 무사고 운전을 하였을 때 보험료를 전년도의 10%만큼 인하해준다. 올해 가입한 가입자가 첫 해 보험료의 절반 이하를 내기 위해서는 몇 년을 무사고로 운전해야 하는지 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$)

예제3 우라늄 U^{237}은 일정한 비율로 붕괴되어, 7일 후에는 절반이 된다고 한다. 며칠 후에 처음 양의 $\frac{1}{10}$ 이하가 되는지 구하여라. (단, $\log 2 = 0.3010$)

B09 | 상용로그의 뜻

개념1 밑이 10인 로그 $\log_{10} A$를 상용로그라 하고 밑을 생략하여 $\log A$으로 나타낸다.

개념2 $\log A$가 정수 n과 $0 \le \alpha < 1$인 α에 대하여 $n + \alpha$이면 n을 $\log A$의 정수부분(지표), α를 $\log A$의 소수부분(가수)라 한다.

예제1 다음의 정수부분과 소수부분을 구하여라. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$)

(1) $\log 12$ (2) $\log 200$

(3) $\log \frac{1}{4}$ (4) $\log 0.06$

개념3 $A=a\times10^n(1\le a<10,\ n$은 정수$)$일 때,

$\log A$의 정수부분은 n, 소수부분은 $\log a$이다.

예제2 다음 상용로그의 정수부분과 소수부분을 구하여라.

(1) $\log 2340$　　(2) $\log 12000$

(3) $\log 0.0543$　　(4) $\log\dfrac{1}{25}$

예제3 $\log 20$의 정수부분을 x, 소수부분을 y라 할 때, 10^x+10^y의 값을 구하여라.

B09E1 | 정수부분과 소수부분1

✓ $\log x$의 정수부분이 n, 소수부분이 α일 때, $\log f(x)$의

정수부분과 소수부분을 n과 α를 이용하여 나타낼 수 있어야 한다.

① $\log A=n+\alpha$일 때, $\log A^2=2n+2\alpha=\begin{cases}(2n)+(2\alpha) & \left(0\le\alpha<\dfrac{1}{2}\right)\\ (2n+1)+(2\alpha-1) & \left(\dfrac{1}{2}\le\alpha<1\right)\end{cases}$

예제1 $[\log A]=2$, $\log A$의 소수부분과 $\log A^2$의 소수부분의 합이 1이다.

조건을 만족시키는 모든 A의 값의 곱을 구하여라.

② $\log A = n+\alpha$일 때, $\log A^3 = 3n+3\alpha = \begin{cases} (3n)+(3\alpha) & \left(0 \le \alpha < \frac{1}{3}\right) \\ (3n+1)+(3\alpha-1) & \left(\frac{1}{3} \le \alpha < \frac{2}{3}\right) \\ (3n+2)+(3\alpha-2) & \left(\frac{2}{3} \le \alpha < 1\right) \end{cases}$

예제2 $[\log x] : [\log x^2] : [\log x^3] = 1:3:5$를 만족시키는 x의 범위를 구하여라.

③ $\log A = n+\alpha$일 때, $\log \frac{1}{A} = -n-\alpha = \begin{cases} (-n)+(-\alpha) & (\alpha = 0) \\ (-n-1)+(1-\alpha) & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$

예제3 $\log x$의 정수부분이 1이고 $\log x^2$과 $\log \frac{1}{x}$의 소수부분이 같다.

조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 구하여라.

④ $\log A = n+\alpha$일 때, $\log 2A = \begin{cases} n+(\alpha+\log 2) & (0 \le \alpha < \log 5) \\ (n+1)+(\alpha-\log 5) & (\log 5 \le \alpha < 1) \end{cases}$

예제4 $f(x) = [\log x]$라 할 때, $f(n) = 1$, $f(n^2) - f(2n) = 2$를 만족시키는

자연수 n의 개수를 구하여라. (단, $\sqrt{10} = 3.16$으로 계산한다.)

⑤ $\log A = n+\alpha$일 때, $\log \sqrt{A} = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\alpha & (n\text{은 짝수}) \\ \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(\alpha+1) & (n\text{은 홀수}) \end{cases}$

예제5 $f(x) = \log x - [\log x]$라 하자. $10 \le A < 10000$인 자연수 A 중

$f(A) < f(\sqrt{A})$를 만족시키는 것의 개수를 구하여라.

B09E2 | 정수부분과 소수부분2

개념1 정수부분은 정수 / 소수부분은 $0 \le \alpha < 1$이다.

예제1 x에 대한 이차방정식 $3x^2-7x+k=0$의 두 근이 $\log A$의 정수부분과 소수부분이다. k의 값을 구하여라.

예제2 $[\log x]=3(\log x-[\log x])$를 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 구하여라.

예제3 $\log x$의 정수부분을 n, 소수부분을 α라 할 때, $(n+\alpha)^2+\alpha^2=8$을 만족시키는 x값을 모두 구하여라.

개념2 더하거나 빼서 정수일 때 좀 간단하게 풀 수 있다.

예제4 $[\log A]=2$, $\log A$의 소수부분과 $\log A^2$의 소수부분의 합이 1이다. 조건을 만족시키는 모든 A의 값의 곱을 구하여라.

예제5 $\log x$의 정수부분이 1이고 $\log x^2$과 $\log\frac{1}{x}$의 소수부분이 같다. 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 구하여라.

B10 | 상용로그의 정수부분

개념1 $\log x$의 정수부분이 n이면

① $n \geq 0$일 때 : x는 $n+1$자리의 수이다.

② $n < 0$일 때 : x는 소수점 이하 n번째 자리부터 0이 아닌 숫자가 등장한다.

예제1 다음의 정수부분을 구하여라.

(1) $\log 438$ (2) $\log 10100$

(3) $\log 0.0612$ (4) $\log 0.00725$

B11 | 상용로그의 소수부분

개념1 $\log x$의 소수부분과 $\log y$의 소수부분이 같으면

x와 y의 숫자 배열이 같다. (정수 n에 대하여 $A \times 10^n = B$이다.)

※ $A = a \times 10^n (1 \leq a < 10,\ n$은 정수) 표현에서 이해하면 좋다.

예제1 $\log 8.16 = 0.9117$일 때, 다음의 값을 구하여라.

(1) $\log 81600$ (2) $\log 816$

(3) $\log 0.816$ (4) $\log 0.00816$

예제2 양수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각

$f(x)$, $g(x)$라 할 때, $f(A)=f(2550)$, $g(A)=g(0.423)$을 만족시키는

A의 값을 구하여라.

예제3 $\log x$의 소수부분을 $f(x)$라 할 때, 집합

$$A=\left\{n \,\middle|\, f(n) \le f\left(\frac{1}{2}\right),\ n\text{은 } 100 \text{ 이하의 자연수}\right\}$$

의 원소의 개수를 구하여라.

B11E1 | 최고자릿수

✓ $\log 2$, $\log 3$이 주어지면 $\log 4$, $\log 5$, $\log 6$, $\log 8$, $\log 9$를 구할 수 있고

이를 이용하여 (7근처에만 안 걸리면) 어떤 수의 최고자리의 수를 구할 수 있다.

예제1 $\log A=5.65$일 때, A의 최고자리의 수를 구하여라.

(단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

예제2 3^{100}의 자릿수, 최고자리의 수, 일의 자릿수를 각각 구하여라.

(단, $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

[지수함수와 로그함수]

B12 | 지수함수의 그래프

탐구 다음 함수의 그래프를 그려라.

$y=2^x$, $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=(-2)^x$

개념1 $y=a^x$의 그래프

① $(0,\ 1)$을 지난다.

② x축을 점근선으로 가진다.

③ 정의역은 실수전체, 치역은 $\{y\,|\,y>0\}$이다.

④ $\begin{cases} a>1\text{이면 증가함수이다. } (x_1<x_2\text{이면 } f(x_1)<f(x_2)\text{이다.}) \\ a=1\text{이면 상수함수이다.} \\ 0<a<1\text{이면 감소함수이다.} \end{cases}$

※ $a<0$이면 함수가 안 되므로 버린다.

⑤ a가 1에서 멀어지면 $y=a^x$의 그래프가 $y=1$에서 멀어진다.

B12E1 | 지수함수의 평행/대칭이동

개념1 y축 방향으로의 평행이동은 점근선이 움직인다.

eg) 2^x+2, 2^x-1

개념2 x축 방향으로의 평행이동은 y축 방향으로 '몇배'

eg) 2^{x+1}, $3\cdot 2^x$

개념3 $y=2^x$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$는 서로 y축에 대하여 대칭이다.

cf) $y=2^x$을 x축에 대하여 대칭이동 시키면 $y=-2^x$이다.

✓ 절댓값이 포함된 그래프도 몇 개 그려보자.

(1) $y=|2^x-1|$

(2) $y=2^{|x|}$

(3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

✓ 문제를 풀다 보면 가끔 나오는 그래프니까 그려보자.

(1) $y=2^x+2^{-x}$

(2) $y=2^x-2^{-x}$

B13 | 지수방정식/지수부등식

개념1 a가 1이 아닌 양수이면 $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

cf) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ (X)

cf) $x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$ (O)

※ 일반적으로 $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$로 풀다 털릴 수도 있다.

✓ 밑을 통일해서 푼다. (통일이 잘 안 되면 로그가 필요하다.)

예제1 다음 방정식의 해를 구하여라.

(1) $2^x = 8$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} = 2\sqrt{2}$

(3) $9^{x^2} - 3^{3x-1} = 0$　　(4) $2^{x+1} = 3$

(5) $2 \cdot 3^x = 5^x$　　(6) $x^{x^2-8} = x^{2x+7}$ (단, $x > 0$)

개념2 $a^x < a^y$일 때,

① $a > 1$이면 $x < y$

② $0 < a < 1$이면 $x > y$

예제1 다음 부등식의 해를 구하여라.

(1) $3^x < 9^{x+2}$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{4}\right)^x$

(3) $125^x \geq (0.2)^{4-x^2}$　　(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 3$

B14 | 지수함수의 치환

✓ $2^x = t$로 치환하면,

(1) $4^x =$　　(2) $2^{2x} =$　　(3) $2^{x+2} =$

(4) $2^{x-3} =$　　(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^x =$　　(6) $x =$

✓ $3^x = t$로 치환하면,

(1) $9^x =$　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x =$　　(3) $3^{x-2} =$

(4) $3^{2-x} =$　　(5) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-1-x} =$　　(6) $3^{x^2} =$

예제1 다음 물음에 답하여라.

(1) 방정식 $4^x = 2^x + 2$의 해를 구하여라.

(2) 방정식 $9^x + 3^{x+1} - 18 = 0$의 해를 구하여라.

(3) 방정식 $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 9 = 0$의 두 근의 합을 구하여라.

(4) 부등식 $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$의 해를 구하여라.

예제2 다음 물음에 답하여라.

(1) $-2 \le x \le 2$에서 $y=2^{2x}-2^{x+1}$의 최솟값과 최댓값을 구하여라.

(2) $4^x-2^{x+a}+b$는 $x=1$에서 최솟값 3을 갖는다. a, b의 값을 구하여라.

(3) $4^x+a\cdot 2^{x+1}-a+6=0$이 두 실근을 갖는다. a값의 범위를 구하여라.

(4) $4^x-k\cdot 2^{x+1}+3k=0$이 두 양의 실근을 가진다. k값의 범위를 구하여라.

(5) $4^x+2^{x+1}+k-5>0$이 모든 x에 대하여 성립한다. k값의 범위를 구하여라.

B15 | 로그함수의 그래프

탐구 다음 함수의 그래프를 그려라.

$y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

개념1 $y=\log_a x$의 그래프는 $a>1$이면 증가함수, $0<a<1$이면 감소함수이다.

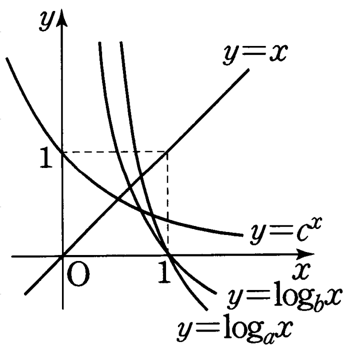
※ $a=1$일 때의 그래프는 $x=1$이 된다. (함수가 아님)

✓ a가 1에서 멀어지면 $y=\log_a x$의 그래프는 $x=1$에서 멀어진다.

예제1 그림은 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

세 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=c^x$의 그래프이다.

a, b, c를 크기 순서대로 나열하여라.



B15E1 | 로그함수의 평행/대칭이동

✓ 그리면서 공부해보자.

(1) $y=\log_2(x-2)$　　(2) $y=\log_2 4x$

(3) $y=\log_2(4x+6)$　　(4) $y=-\log_2 x$

(5) $y=\log_2(-x)$　　(6) $y=\log_2\dfrac{4}{x-1}$

(7) $y=|\log_2 x|$　　(8) $y=\log_2|x|$

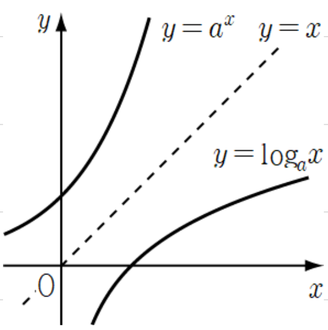
(9) $y=\dfrac{1}{2}\log_2 x^2$

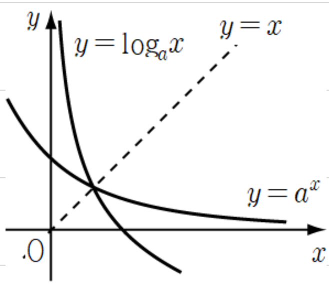
B15E2 | 지수함수와 로그함수

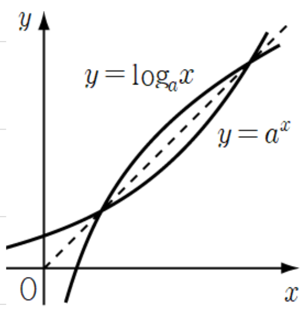
개념1 $y=a^x \leftrightarrow y=\log_a x$: 서로 역함수이다.

$\Rightarrow \log_a a^x = a^{\log_a x} = x$

$\Rightarrow$ $y=\log_a x$와 $y=a^x$는 서로 $y=x$에 대하여 대칭이다.







예제1 $y=2^{x-3}-4$와 그 역함수로 둘러싸인 도형 내의 $y=x$를 만족시키며

x좌표와 y좌표가 정수인 점의 개수를 구하여라.

B16 | 로그방정식/로그부등식

✔ 가능하면 밑을 통일한다.

✔ 부등식에서 밑이 $0<a<1$이면 부등호 방향 뒤집어 주는 것 조심

✔ 진수조건 조심 !!

예제1 다음 방정식/부등식의 해를 구하여라.

(1) $\log x=2$ (2) $\log x^2=4$

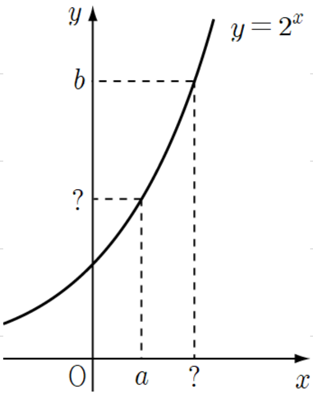
(3) $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$ (4) $\log(x+2)<\log 5$

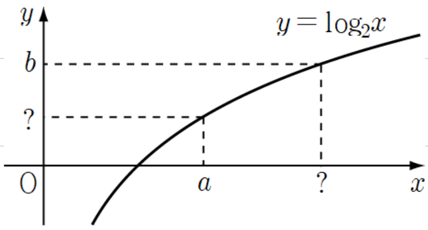
(5) $\log_2(3-x)>1+\log_2 x$ (6) $2\log_{\frac{1}{2}}(x-4)\geq\log_{\frac{1}{2}}(-x+6)$

(7) $\log_3 x<\log_3\dfrac{1}{x+2}$ (8) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<3$

B16E1 | 그래프 위의 점

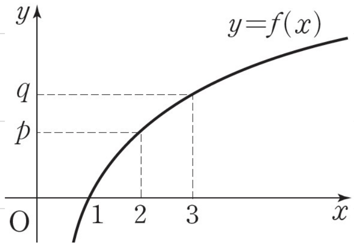
개념1 점 $(a,\ b)$가 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다. $\Leftrightarrow$ $b=f(a)$





예제1 오른쪽 그림에서 $f(x)=\log x$이다.

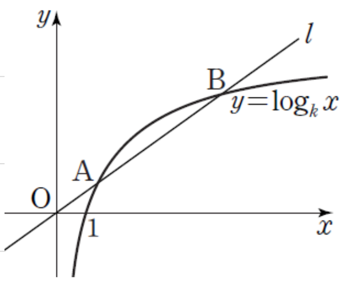
$f(15)$를 p와 q를 이용하여 나타내어라.



예제2 원점을 지나는 직선 l과 $y=\log_k x$가

두 점 A, B에서 만나고 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:3$이다.

점 A의 x좌표를 구하여라. (단, $k>1$)

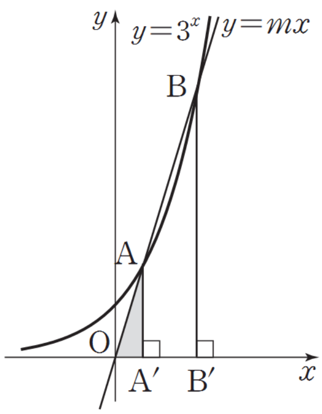


예제3 그림과 같이 A, B는 곡선 $y=3^x$와 직선 $y=mx$의

교점이고 A′과 B′은 각각 A, B에서 x축에 내린

수선의 발이다. 사다리꼴 AA′B′B의 넓이가

삼각형 OA′A 넓이의 8배일 때, m의 값을 구하여라.



B16E2 | 그래프와 부등식

예제1 $0<a<1$일 때, $0<\log_a b<1$이다. b의 범위를 구하여라.

예제2 $a^x<a^y$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $a>0$이고 $a\neq 1$이다.)

ㄱ. $x<y$

ㄴ. $\log_a x<\log_a y$ (단, x, y가 양수)

ㄷ. $x<y$이면 $a>1$

ㄹ. $1<a^x$이면 $x<y$

예제3 $2^a=3^b$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. $b<a$

ㄴ. $0<a$이면 $b<a$

ㄷ. $a<b$이면 $a<0$

ㄹ. $0<a$이면 $3b<2a$

✓ 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 다음 식의 의미를 말하여라.

(1) $\dfrac{b}{a}$

(2) $\dfrac{b-3}{a-2}$

(3) $\dfrac{a}{b-1}$

(4) $\sqrt{a^2+b^2}$

(5) a^2+b^2

(6) ab

(7) $a+b$

(8) $3a+b$

예제4 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프가 직선 $x+y=10$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. $\dfrac{y_1}{x_1}>\dfrac{y_2}{x_2}$

ㄴ. $x_1y_1<x_2y_2$

ㄷ. $x_2-x_1=-y_2+y_1$

ㄹ. ${x_1}^2+{y_1}^2={x_2}^2+{y_2}^2$

B17 | 로그함수의 치환

✓ $\log_2 x = t$로 치환하면, (단, $x>0$)

(1) $\log_2 x^2 =$ (2) $\log_2 2x =$ (3) $\log_2 \dfrac{x^2}{4} =$

(4) $\log_x 2 =$ (5) $x^2 =$ (6) $\log_2(x+4) =$

예제1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $(\log_2 x)^2 = \log_2 x$ (2) $(\log_3 3x)^2 - \log_3 27x = 0$

(3) $x^{\log x - 1} = 100$ (4) $x^{\log_3 x} = 27x^2$

예제2 다음을 구하여라.

(1) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 1$의 최솟값

(2) $\left(\log_3 \dfrac{x}{27}\right)(\log_3 3x)$의 최솟값

(3) $\log_2 8x + \log_x 2$의 최솟값 (단, $x>1$)

(4) $x^{-\log_3 x + 4}$의 최댓값