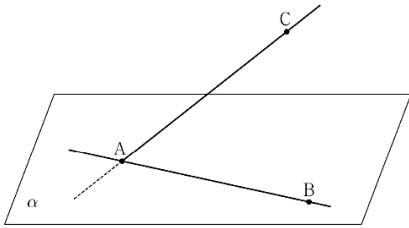

기출문제 다잡기

평가원의 수준

[공간도형과 공간좌표]

[2023학년도 수능 기하 27번]

1. 좌표공간에 직선 AB 를 포함하는 평면 α 가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C 에 대하여 직선 AB 와 직선 AC 가 이루는 예각의 크기를 θ_1 이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$ 이고, 직선 AC 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ 이다. 평면 ABC 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ_2 라 할 때, $\cos\theta_2$ 의 값은?1)

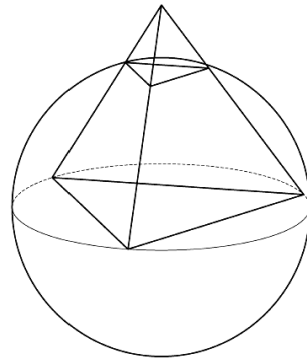


- ① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$
 ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$

▷ 웰메이드 삼수선.

[2023학년도 수능 기하 30번]

2. 좌표공간에 정사면체 $ABCD$ 가 있다. 정삼각형 BCD 의 외심을 중심으로 하고 점 B 를 지나는 구를 S 라 하자. 구 S 와 선분 AB 가 만나는 점 중 B 가 아닌 점을 P , 구 S 와 선분 AC 가 만나는 점 중 C 가 아닌 점을 Q , 구 S 와 선분 AD 가 만나는 점 중 D 가 아닌 점을 R 라 하고, 점 P 에서 구 S 에 접하는 평면을 α 라 하자. 구 S 의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k 이다. k^2 의 값을 구하여라.2)

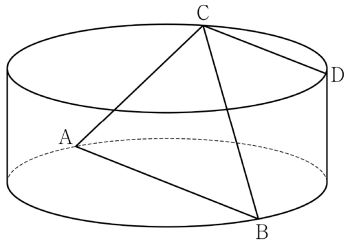


▷ 중등 기하 느낌. 정사면체의 단면 문제를 내버리네. 어떻게 보면 9월 29번하고 비슷해 보이기도.

[2023학년도 9월 기하 27번]

3. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는?3)

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다.
 (나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.



- ① 5
- ② $\frac{11}{2}$
- ③ 6
- ④ $\frac{13}{2}$
- ⑤ 7

▷ 삼수선. 깔끔.

[2023학년도 9월 기하 29번]

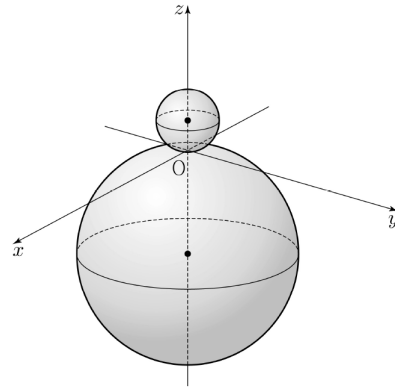
4. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4,$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + (z+7)^2 = 49$$

가 있다. 점 $A(\sqrt{5}, 0, 0)$ 을 지나고 zx 평면에 수직이며, 구 S_1 과 z 좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α 라 하자. 구 S_2 가 평면 α 와 만나서 생기는 원을 C 라 할 때, 원 C 위의 점 중 z 좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2 와 점 B에서 접하는 평면을 β 라 하자. 원 C 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.4)

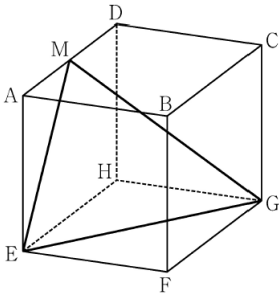
(단 p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



▷ 단면화 시키면 평면도형 문항.
 계산이 좀 복잡하다. 삼각함수 덧셈정리 땅겨..

[2022학년도 수능 기하 27번]

5. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다. 선분 AD 의 중점을 M 이라 할 때, 삼각형 MEG 의 넓이는? ⁵⁾

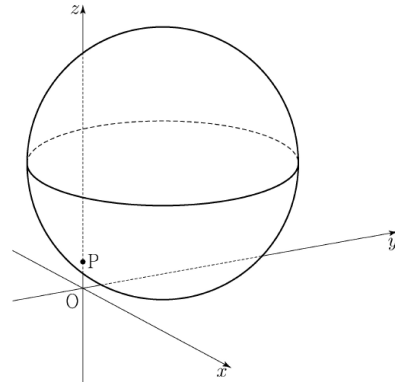


- ① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$
 ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

▷ 점 M 에서 (삼수선을 이용하여) 선분 EG 에 수선의 발을 내린다.

[2022학년도 수능 기하 30번]

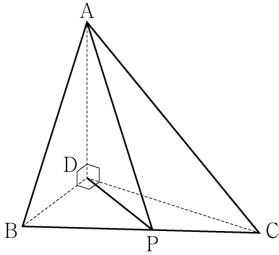
6. 좌표공간에 중심이 $C(2, \sqrt{5}, 5)$ 이고 점 $P(0, 0, 1)$ 을 지나는 구 $S: (x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 + (z-5)^2 = 25$ 가 있다. 구 S 가 평면 OPC 와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q , 구 S 위를 움직이는 점 R 에 대하여 두 점 Q, R 의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1 이라 하자. 삼각형 OQ_1R_1 의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R 에 대하여 삼각형 OQ_1R_1 의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. ⁶⁾ (단, O 는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1 은 한 직선 위에 있지 않으며, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



▷ 복잡하다.

[2022학년도 9월 기하 27번]

7. 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$ 이고 $\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{DP}$ 의 최솟값은?)

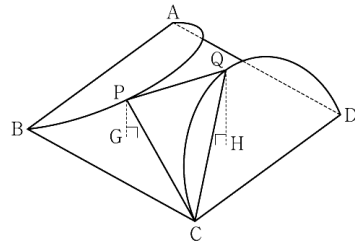
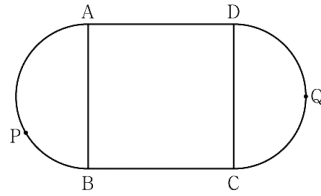


- ① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$
 ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

▷ 기본적으로 삼수선 문항인데, 애도 최소고 애도 최소니까 합도 최소입니다 가 좀 어색하다.

[2022학년도 9월 기하 29번]

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자. 이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG} = \sqrt{3}$, $\overline{GH} = 2\sqrt{3}$ 이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ 일 때, $70 \times \cos^2 \theta$ 의 값을 구하여라.⁸⁾ (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



▷ 종이접기, 평면의 확장과 교선의 발견.

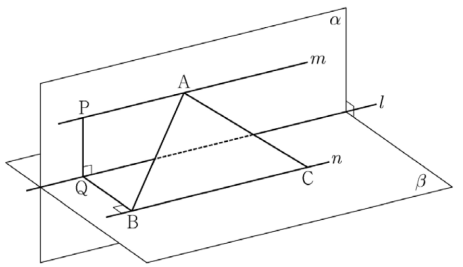
[수능 예시문항 기하 23번]

9. 좌표공간의 점 $P(1, 3, 4)$ 를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 하자. 두 점 P 와 Q 사이의 거리는?⁹⁾
- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

▷ 대칭 한 번씩 내더라구.

[수능 예시문항 기하 25번]

10. 좌표공간에서 수직으로 만나는 두 평면 α, β 의 교선을 l 이라 하자. 평면 α 위의 직선 m 과 평면 β 위의 직선 n 은 각각 직선 l 과 평행하다. 직선 m 위의 $\overline{AP}=4$ 인 두 점 A, P 에 대하여 점 P 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 Q , 점 Q 에서 직선 n 에 내린 수선의 발을 B 라 하자. $\overline{PQ}=3$, $\overline{QB}=4$ 이고, 점 B 가 아닌 직선 n 위의 점 C 에 대하여 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이는?¹⁰⁾



- ① 18 ② 20 ③ 22
 ④ 24 ⑤ 26

▷ 점 A에서 직선 BC에 수선의 발을 내리자.
삼수선의 정리를 이용하여.

[수능 예시문항 기하 30번]

11. 좌표공간에서 점 $A(0, 0, 1)$ 을 지나는 직선이 중심이 $C(3, 4, 5)$ 이고 반지름의 길이가 1인 구와 한 점 P에서만 만난다. 세 점 A, C, P 를 지나는 원의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{q}{p}\sqrt{41}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.¹¹⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

▷ $\angle APC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 세 점 A, C, P 를 지나는 원의 지름은 선분 AC 이다. 정사영의 넓이는 직선 AC 와 xy 평면이 이루는 각을 조사해야 한다. 그런데 이거 공간벡터 문항 아냐?

[2020학년도 수능 3번]

12. 좌표공간의 두 점 $A(2, 0, 1)$, $B(3, 2, 0)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점의 좌표가 $(0, a, 0)$ 일 때, a 의 값은?¹²⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

▷ 점 $(0, a, 0)$ 을 줬다. 조건을 식으로 쓰면 되겠다.

[2020학년도 9월 3번]

13. 좌표공간의 두 점 $A(a, 4, -9)$, $B(1, 0, -3)$ 에 대하여 선분 AB 를 3:1로 외분하는 점이 y 축 위에 있을 때, a 의 값은?¹³⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

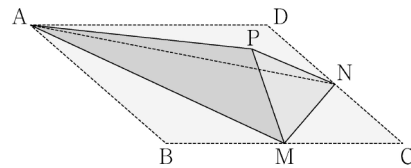
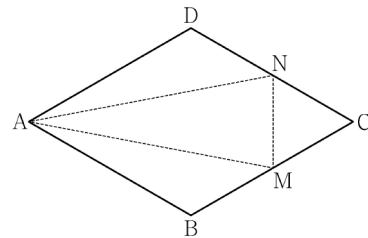
▷ 공간도형 시그니처.
내분/외분점을 나타낼 수 있고,
 y 축 위에 있는 점은 _____.

[2020학년도 수능 27번]

14. 그림과 같이 한 변의 길이가 4이고 $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ 인

마름모 $ABCD$ 모양의 종이가 있다. 변 BC 와 변 CD 의 중점을 각각 M 과 N 이라 할 때, 세 선분 AM , AN , MN 을 접는 선으로 하여 사면체 $PAMN$ 이 되도록 종이를 접었다. 삼각형 AMN 의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는

$\frac{q}{p}\sqrt{3}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.¹⁴⁾ (단, 종이의 두께는 고려하지 않으며 P 는 종이를 접었을 때 세 점 B, C, D 가 합쳐지는 점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



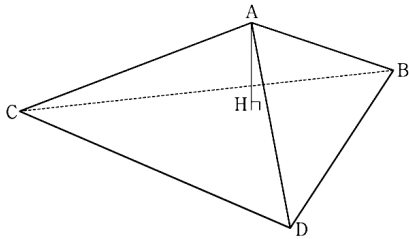
▷ 공간벡터 문항인 [29번]보다 어려웠지만 정답률은 더 높다. 왜냐면 [27번]이어서.

종이접기에 대한 이해와 복잡한 계산.
코사인법칙 필요한 삼각형 막 뜨고..

종이접기 에바고 계산량 핵에바. 평가원 미친놈들아.

[2019학년도 수능 19번]

15. 한 변의 길이가 12인 정삼각형 BCD를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 삼각형 CDH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 3배, 삼각형 DBH의 넓이는 삼각형 BCH의 넓이의 2배이고 $\overline{AH}=3$ 이다. 선분 BD의 중점을 M, 점 A에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 선분 AQ의 길이는?15)

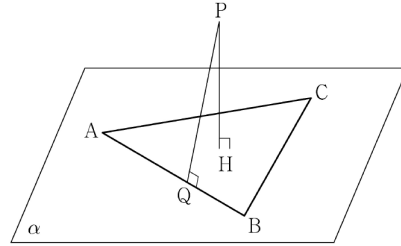


- ① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
 ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

▷ 소위 [시소야매]를 모르면
 계산/상황 이해가 감당하기 힘들다.
 내지 말라고 평가원 시바들아.

[2019학년도 9월 12번]

16. 그림과 같이 평면 α 위에 넓이가 24인 삼각형 ABC가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H, 직선 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고, $\overline{PH}=4$, $\overline{AB}=8$ 일 때, 선분 PQ의 길이는?16)



- ① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{22}$
 ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{26}$

▷ 삼수선의 정리. 깔끔.

[2018학년도 수능 20번]

17. 좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$ 라 하자.

- (가) 평면 α 는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
- (나) 평면 α 는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$ 가 최대가 되는 평면을 β 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?¹⁷⁾

- <보 기>
- ㄱ. 평면 β 는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다.
 - ㄴ. 평면 β 는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
 - ㄷ. 세 점이 A(2, 3, 0), B(0, 1, 0), C(2, -1, 0)일 때, $d(\beta)$ 는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 개어렵다. 기억, 니은을 꼼꼼하게 따지는 것이. 제대로 풀려고 들면 뭐 이런 문항이 있지 싶은..

[2018학년도 9월 17번]

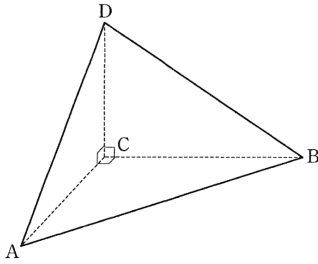
18. 좌표공간에 구 $S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 과 xy 평면 위의 원 $C: x^2 + y^2 = 4$ 가 있다. 구 S와 점 P에서 접하고 원 C 위의 두 점 Q, R을 포함하는 평면이 xy 평면과 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 이다. 점 P의 z 좌표가 1보다 클 때, 선분 QR의 길이는?¹⁸⁾

- ① 1
- ② $\sqrt{2}$
- ③ $\sqrt{3}$
- ④ 2
- ⑤ $\sqrt{5}$

▷ 적당한 단면화.

[2018학년도 9월 25번]

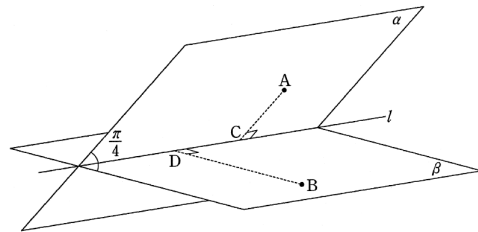
19. $\overline{AB}=8$, $\angle ACB=90^\circ$ 인 삼각형 ABC에 대하여 점 C를 지나고 평면 ABC에 수직인 직선 위에 $\overline{CD}=4$ 인 점 D가 있다. 삼각형 ABD의 넓이가 20일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하여라.¹⁹⁾



▷ 삼수선의 정리 기본 문항.

[2017학년도 9월 29번]

20. 그림과 같이 직선 l 을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 평면 α 와 β 가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=\sqrt{3}$ 이고 직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. $36(a+b)$ 의 값을 구하여라.²⁰⁾ (단, a, b 는 유리수이다.)



▷ 평면에 내린 수선의 발은 얼마나 소중한가.

점 A에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그리고 두 직각삼각형 AHC와 AHB를 꺼려본다.

[2016학년도 수능 3번]

21. 좌표공간에서 세 점 $A(a, 0, 5)$, $B(1, b, -3)$, $C(1, 1, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 $(2, 2, 1)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?21)
- ① 6 ② 7 ③ 8
 ④ 9 ⑤ 10

▷ 무게중심.

[2016학년도 수능 27번]

22. 좌표공간에 서로 수직인 두 평면 α 와 β 가 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B 에 대하여 $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ 이고 직선 AB 는 평면 β 에 평행하다. 점 A 와 평면 β 사이의 거리가 2이고, 평면 β 위의 점 P 와 평면 α 사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB 의 넓이를 구하여라.22)

▷ 알아보기 좋게 그려보자.

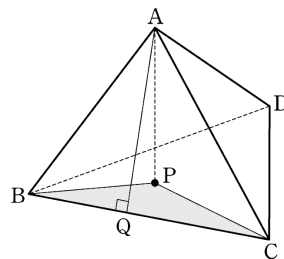
[2016학년도 9월 4번]

23. 좌표공간의 점 $P(2, 2, 3)$ 을 yz 평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q 라 하자. 두 점 P 와 Q 사이의 거리는?23)
- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

▷ 대칭이동.

[2016학년도 9월 26번]

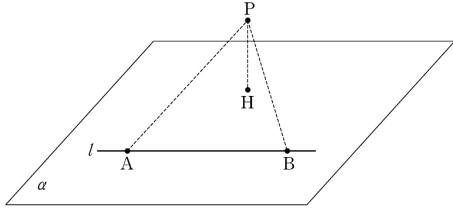
24. 그림과 같이 $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 12$, $\cos(\angle ABC) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 사면체 $ABCD$ 에 대하여 점 A 의 평면 BCD 위로의 정사영을 P 라 하고 점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 Q 라 하자. $\cos(\angle AQP) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때 삼각형 BCP 의 넓이는 k 이다. k^2 의 값을 구하여라.24)



▷ 삼삼삼수선.

[2015학년도 수능 12번]

25. 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선을 l 이라 하고, 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB}=\overline{PA}=\overline{PB}=6$, $\overline{PH}=4$ 일 때, 점 H와 직선 l 사이의 거리는?²⁵⁾



- ① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
 ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

▷ 직각을 숨겨둔 삼수선.

[2015학년도 9월 15번]

26. 좌표공간에 두 점 $(a, 0, 0)$ 과 $(0, 6, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $(0, 0, 4)$ 와 직선 l 사이의 거리가 5일 때, a^2 의 값은?²⁶⁾

- ① 8 ② 9 ③ 10
 ④ 11 ⑤ 12

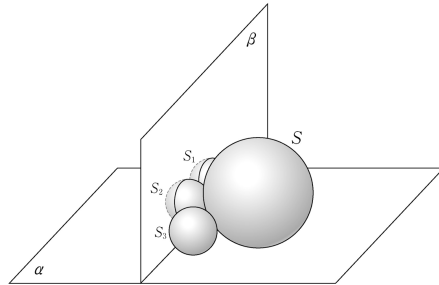
▷ ① 삼수선의 정리로 수선을 내릴 수 있다.
 ② 내분점을 이용하여 직선 위의 점을 나타낼 수 있다.

[2015학년도 9월 29번]

27. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) S 의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3 의 반지름의 길이는 1이다.
 (나) S_1, S_2, S_3 는 모두 S 에 접한다.
 (다) S_1 은 S_2 와 접하고, S_2 는 S_3 과 접한다.

S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 이라 하자. 두 점 O_1, O_2 를 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 β , 두 점 O_2, O_3 를 지나고 평면 α 에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D 라 하자. 단면 D 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.²⁷⁾
 (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



▷ 중심들만 뽑아서 그려보자.

두 구가 서로 외접, 평면과 구가 접하면?

평면 α 에 수직인 방향에서 바라보는 단면화.

[2014학년도 수능 19번]

28. 좌표공간에서 중심의 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 양수인 구 S 가 x 축과 y 축과 각각 접하고 z 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S 가 xy 평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π 이고 z 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S 의 반지름의 길이는?²⁸⁾

- ① 11 ② 12 ③ 13
 ④ 14 ⑤ 15

▷ 좀 헛갈리지?

점 (a, b, c) 에서 x 축까지의 거리는?

을 먼저 생각해보자.

[2014학년도 9월 19번]

29. 좌표공간에서 y 축을 포함하는 평면 α 에 대하여 xy 평면 위의 원 $C_1 : (x-10)^2 + y^2 = 3$ 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 yz 평면 위의 원 $C_2 : y^2 + (z-10)^2 = 1$ 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S 로 같을 때, S 의 값은?²⁹⁾

- ① $\frac{\sqrt{10}}{6}\pi$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$ ③ $\frac{7\sqrt{10}}{30}\pi$
 ④ $\frac{4\sqrt{10}}{15}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

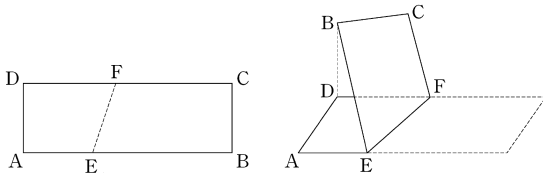
▷ y 축을 포함하는 평면 α

$\Leftrightarrow y$ 축을 포함하며 [회전하는] 평면 α

$\Rightarrow y$ 축 방향에서 바라보는 단면화.

[2013학년도 수능 28번]

30. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$ 인 직사각형 ABCD모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$ 일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ 이다. $60\cos\theta$ 의 값을 구하여라.³⁰⁾ (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



▷ 종이접기에 대한 상식이 없으면 어렵다.

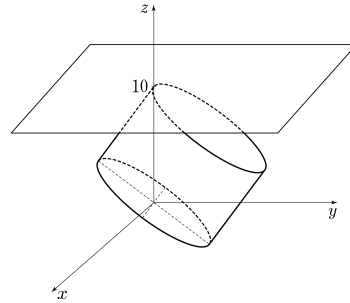
접는 선에 대하여 수직인 면 위를 움직인다.
 ⇒ 선분 BD와 선분 EF가 서로 수직이다.

[2013학년도 9월 14번]

31. 좌표공간에 있는 원기둥이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 높이는 8이다.
 (나) 한 밑면의 중심은 원점이고 다른 밑면은 평면 $z=10$ 과 오직 한 점 $(0, 0, 10)$ 에서 만난다.

이 원기둥의 한 밑면의 평면 $z=10$ 위로의 정사영의 넓이는?³¹⁾



- ① $\frac{139}{5}\pi$ ② $\frac{144}{5}\pi$ ③ $\frac{149}{5}\pi$
 ④ $\frac{154}{5}\pi$ ⑤ $\frac{159}{5}\pi$

▷ 대충 단면화.

정확하게는 원기둥의 한 밑면과 xy 평면의 교선 방향에서 단면화

[2013학년도 9월 27번]

32. 좌표공간에서 구

$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$$

위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.³²⁾
(단, a, b 는 자연수이다.)

▷ 두 구의 위치관계 파악.
⇒ 어떻게 자를지 연구

[2012학년도 수능 24번]

33. 좌표공간에 점 $A(9, 0, 5)$ 가 있고, xy 평면 위에 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 이 있다. 타원 위의 점 P에 대하여 \overline{AP} 의 최댓값을 구하여라.³³⁾

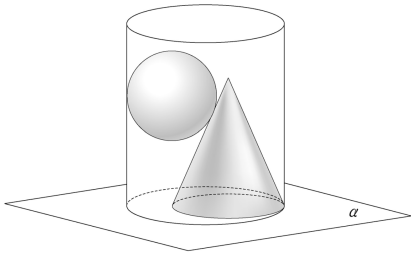
▷ 일단 xy 평면에 수선의 발 내리고,

[2012학년도 수능 29번]

34. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α 와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
 (나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A', B'일 때, $\angle A'OB' = 180^\circ$ 이다.

직선 AB와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하여라.³⁴⁾ (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A'은 일치한다.)



▷ 뻘한 단면화. 이정도면 평면도형 문항이다.

[2012학년도 9월 18번]

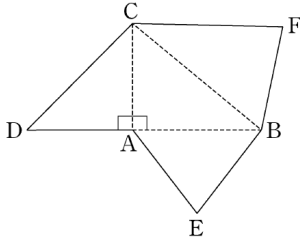
35. 좌표공간에 두 점 $A(0, -1, 1)$, $B(1, 1, 0)$ 이 있고, xy 평면 위에 원 $x^2 + y^2 = 13$ 이 있다. 이 원 위의 점 $(a, b, 0)$ ($a < 0$)을 지나고 z 축에 평행한 직선이 직선 AB와 만날 때, $a+b$ 의 값은?³⁵⁾

- ① $-\frac{47}{10}$ ② $-\frac{23}{5}$ ③ $-\frac{9}{2}$
 ④ $-\frac{22}{5}$ ⑤ $-\frac{43}{10}$

▷ 내분점으로 해석해봐.

[2012학년도 9월 15번]

36. 그림은 $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$ 이고 $\angle DAC = \angle CAB = 90^\circ$ 인 사면체의 전개도이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (36)



<보기>

- ㄱ. $\overline{CP} = \sqrt{2} \cdot \overline{BP}$
- ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.
- ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

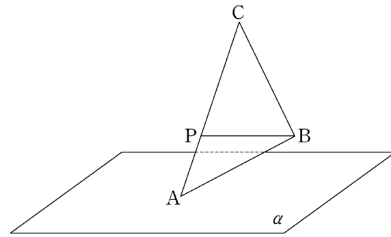
- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 접을 때는, 접는 선에 수직으로.

점 P의 평면 ABC에 내린 수선의 발은 _____이다.

[2012학년도 9월 29번]

37. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α 로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP}=4$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2 의 값을 구하여라. (37)



▷ 점 P에서 평면 α 까지의 거리는 _____이다.

평면 α 에 대하여 두 점 P, B를 고정했을 때, 두 점 A와 C가 떠다니는 것이 어려운 점.

[2011학년도 수능 3번]

38. 좌표공간에서 점 $P(0, 3, 0)$ 과 점 $A(-1, 1, a)$ 사이의 거리는 점 P 와 점 $B(1, 2, -1)$ 사이의 거리의 2배이다. 양수 a 의 값은?³⁸⁾
- ① $\sqrt{7}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$
 ④ 2 ⑤ $\sqrt{3}$

▷ 시키는 대로.

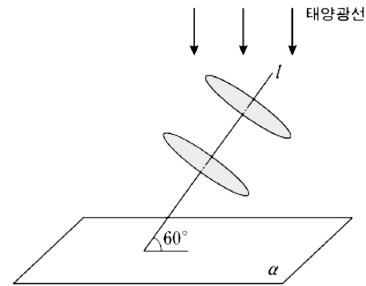
[2011학년도 9월 18번]

39. 좌표공간에서 점 $P(-3, 4, 5)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 하자. 선분 PQ 를 2:1로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.³⁹⁾

▷ 대칭이동과 내분!

[2011학년도 수능 11번]

40. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α 가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l 은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α 와 이루는 각의 크기가 60° 이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α 에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α 에 생기는 그림자의 넓이는?⁴⁰⁾ (단, 원판의 두께는 무시한다.)



- ① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{1}{8}$
 ④ $\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$

▷ 원판과 α 의 교선 방향에서 단면화. 두 개 이상의 평면이 뜨면 교선 방향이 중요하다.

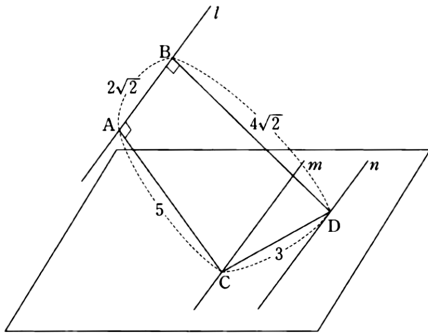
[2011학년도 9월 25번]

41. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n 이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}, \overline{CD} = 3$
- (나) $\overline{AC} \perp l, \overline{AC} = 5$
- (다) $\overline{BD} \perp l, \overline{BD} = 4\sqrt{2}$

두 직선 m, n 을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때,

$15\tan^2\theta$ 의 값을 구하여라.⁴¹⁾ (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)



- ▷ 한 때는 이런 문항도 어려웠지.
- ① 세 직선이 평행하다. 직각을 더 찾아보자.
 - ② 삼수선의 정리. 바닥 평면도 그려줬다.
- 두 점 A, B에서 바닥에 수선을 내리자.

[2010학년도 수능 5번]

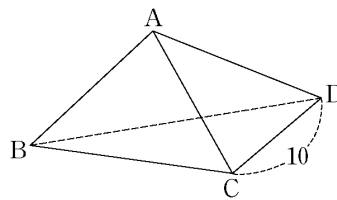
42. 평면 α 위에 $\angle A = 90^\circ$ 이고 $\overline{BC} = 6$ 인 직각이등변삼각형 ABC가 있다. 평면 α 밖의 한 점 P에서 이 평면까지의 거리가 4이고, 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발이 점 A일 때, 점 P에서 직선 BC까지의 거리는? ⁴²⁾

- ① $3\sqrt{2}$
- ② 5
- ③ $3\sqrt{3}$
- ④ $4\sqrt{2}$
- ⑤ 6

▷ 삼수선의 정리. 잘 그려보자.

[2010학년도 9월 5번]

43. 사면체 ABCD에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 30° 이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는? ⁴³⁾



- ① $2\sqrt{3}$
- ② 4
- ③ 5
- ④ $3\sqrt{3}$
- ⑤ $4\sqrt{3}$

▷ 수선수선수선.

[2010학년도 수능 25번]

44. 좌표공간에서 x 축을 포함하고 xy 평면과 이루는 각의 크기가 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)인 평면을 α 라 하자. 평면 α 가 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 과 만나서 생기는 도형의 xy 평면 위로의 정사영이 영역

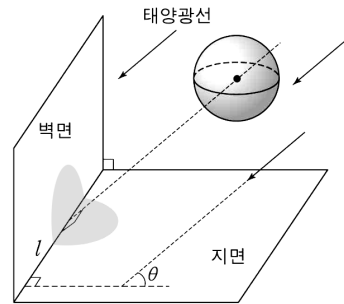
$$\{(x, y, 0) \mid x + 3y - 2 \leq 0\}$$

에 포함되도록 하는 θ 에 대하여 $\cos \theta$ 의 최댓값을 M 이라 하자. $60M^2$ 의 값을 구하여라.⁴⁴⁾

- ▷ x 축을 포함하며 회전하는 평면.
 ⇒ x 축 방향에서 단면화.

[2010학년도 9월 15번]

45. 그림과 같이 반지름의 길이가 r 인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ 인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양광선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l 과 수직으로 만난다. 벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l 까지 거리의 최댓값을 a 라 하고, 지면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l 까지 거리의 최댓값을 b 라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? ⁴⁵⁾



<보 기>

- ㄱ. 그림자와 교선 l 의 공통부분의 길이는 $2r$ 이다.
- ㄴ. $\theta = 60^\circ$ 이면 $a < b$ 이다.
- ㄷ. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$

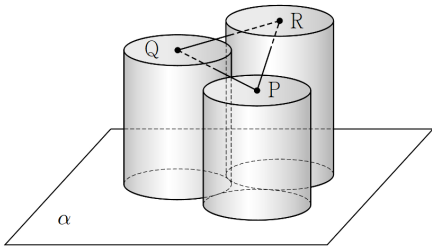
- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 입체의 그림자 문항을 다루는 요령이 있지.

- ① 그림자를 만드는 평면.
- ② 교선 방향에서 단면화.

[2009학년도 수능 24번]

46. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α 와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α 가 이루는 각의 크기는 60° 이다. 세 원기둥의 높이를 각각 $8, a, b$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.⁴⁶⁾ (단, $8 < a < b$)



- ▷ 삼각형을 평면에 정사영하는 요령이 있지.
- ① 기둥 옆면에 붙은 직각삼각형.
 - ② 이루는 각은 정사영을 이용하여.

[2009학년도 9월 9번]

47. 다음 조건을 만족하는 점 P 전체의 집합이 나타내는 도형의 둘레의 길이는?⁴⁷⁾

좌표공간에서 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구가 두 개의 구

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$$

에 동시에 외접한다.

- ① $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$
- ② $\sqrt{5}\pi$
- ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}\pi$
- ④ $2\sqrt{5}\pi$
- ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$

▷ 자취가 원이 되는 것은 보이니?
반지름의 길이를 찾아야 한다.
적당한 평면도형으로 옮겨서 해석.

[2009학년도 9월 12번]

48. 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 $ABCD$ 가 있다. 두 삼각형 BCD , ACD 의 무게중심을 각각 F , G 라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?⁴⁸⁾

<보 기>

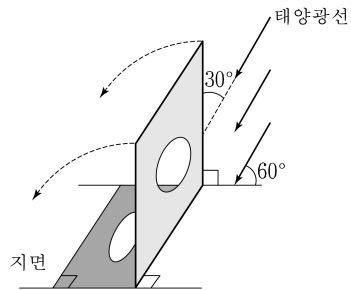
ㄱ. 직선 AF 와 직선 BG 는 \perp 인 위치에 있다.
 ㄴ. 삼각형 ABC 의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다.
 ㄷ. $\angle AOG = \theta$ 일 때, $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ $\overline{AO} : \overline{OF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 를 알면 편하다.
 이럴 때 체크해놓자.

[2009학년도 9월 25번]

49. 그림과 같이 태양광선이 지면과 60° 의 각을 이루면서 비추고 있다. 한 변의 길이가 4인 정사각형의 중앙에 반지름의 길이가 1인 원 모양의 구멍이 뚫려 있는 판이 있다. 이 판은 지면과 수직으로 서 있고 태양광선과 30° 의 각을 이루고 있다. 판의 밑변을 지면에 고정하고 판을 그림자 쪽으로 기울일 때 생기는 그림자의 최대 넓이를 S 라 하자. S 의 값을 $\frac{\sqrt{3}(a+b\pi)}{3}$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.⁴⁹⁾ (단, a, b 는 정수이고 판의 두께는 무시한다.)



▷ 회전하는 평면. 교선 방향에서 단면화.

[2008학년도 수능 7번]

50. 좌표공간에서 평면 $x=3$ 과 평면 $z=1$ 의 교선을 l 이라 하자. 점 P 가 직선 l 위를 움직일 때, 선분 OP 의 길이의 최솟값은? ⁵⁰⁾ (단, O 는 원점이다.)
- ① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$
 ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

▷ 범위가 약간 애매하긴 한다..
 평면 $x=3$ 과 평면 $z=1$ 를 그려봐.
 그 위의 점은 $(3, a, 1)$ 로 나타낸다.

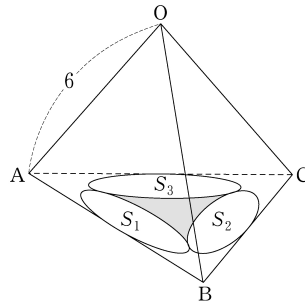
[2008학년도 수능 23번]

51. 좌표공간에 네 점 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-3, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 사면체 $ABCD$ 가 있다. 모서리 BD 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (a, b, c) 라고 할 때, $a+b+c = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. ⁵¹⁾ (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

▷ 이것도 애매하긴 하다.
 P 는 선분 BD 를 내분하는 점이다.
 선분 BD 의 $t:(1-t)$ 내분점으로 나타내보자.

[2008학년도 수능 24번]

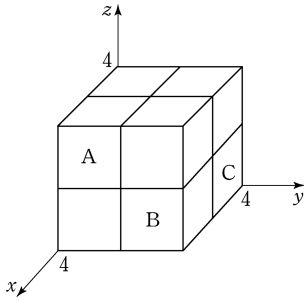
52. 한 변의 길이가 6인 정사면체 $OABC$ 가 있다. 세 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ 에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3 이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3 으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S 라 할 때, $(S+\pi)^2$ 의 값을 구하여라. ⁵²⁾



▷ (원래의 넓이) × (코사인 제타)

[2008학년도 9월 8번]

53. 그림과 같이 좌표공간에서 한 변의 길이가 4인 정육면체를 한 변의 길이가 2인 8개의 정육면체로 나누었다. 이 중 그림의 세 정육면체 A, B, C 안에 반지름의 길이가 1인 구가 각각 내접하고 있다. 3개의 구의 중심을 연결한 삼각형의 무게중심의 좌표를 (p, q, r) 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은?⁵³⁾

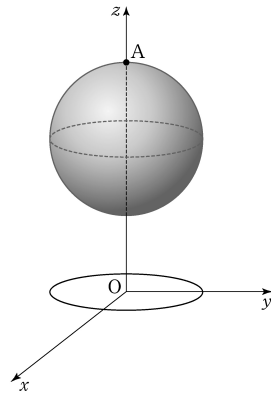


- ① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$
 ④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

▷ 대충.

[2008학년도 9월 23번]

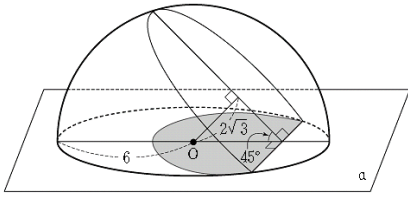
54. 좌표공간에서 xy 평면 위의 원 $x^2+y^2=1$ 을 C 라 하고, 원 C 위의 점 P 와 점 $A(0, 0, 3)$ 을 잇는 선분이 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$ 과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 P 가 원 C 위를 한 바퀴 돌 때, 점 Q 가 나타내는 도형 전체의 길이는 $\frac{b}{a}\pi$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.⁵⁴⁾ (단, 점 Q 는 점 A 가 아니고, a, b 는 서로소인 자연수이다.)



▷ 반지름의 길이만 구하면 되겠지?
 x 축 방향에서 단면화.

[2008학년도 9월 24번]

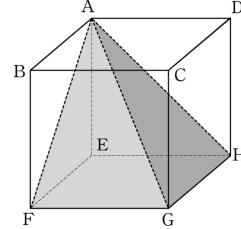
55. 반지름의 길이가 6인 반구가 평면 α 위에 놓여 있다. 반구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 중심을 O 라 하자. 그림과 같이 중심 O 로부터 거리가 $2\sqrt{3}$ 이고 평면 α 와 45° 의 각을 이루는 평면으로 반구를 자를 때, 반구에 나타나는 단면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{2}(a+b\pi)$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라.⁵⁵⁾ (단, a, b 는 자연수이다.)



▷ 원래 활꼴의 넓이 구하고, _____ 배.

[2007학년도 수능 6번]

56. 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 평면 AFG 와 평면 AGH 가 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos^2\theta$ 의 값은?⁵⁶⁾



- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{5}$
- ③ $\frac{1}{4}$
- ④ $\frac{1}{3}$
- ⑤ $\frac{1}{2}$

▷ 원래 법선벡터로 풀면 각인 문항인데 $\perp\perp$ 교선 찾고, 각 면에 포함되는 교선의 수선 쓰고.

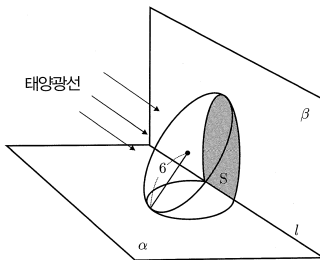
[2007학년도 9월 5번]

57. 좌표공간의 세 점 $A(a, 0, b)$, $B(b, a, 0)$, $C(0, b, a)$ 에 대하여 $a^2 + b^2 = 4$ 일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은?57) (단, $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.)
- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

▷ 약간 당황할 수 있다.
 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 조사해봐.

[2007학년도 9월 25번]

58. 서로 수직인 두 평면 α , β 의 교선을 l 이라 하자. 반지름의 길이가 6인 원판이 두 평면 α , β 와 각각 한 점에서 만나고 교선 l 에 평행하게 놓여 있다. 태양광선이 평면 α 와 30° 의 각을 이루면서 원판의 면에 수직으로 비출 때, 그림과 같이 평면 β 에 나타나는 원판의 그림자의 넓이를 S 라 하자. S 의 값을 $a+b\sqrt{3}\pi$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.58) (단, a , b 는 자연수이고 원판의 두께는 무시한다.)



▷ 어디서 단면화?

[2006학년도 수능 10번]

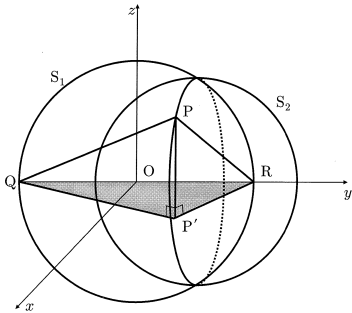
59. 좌표공간에서 xy 평면, yz 평면, zx 평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서 구 $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 24$ 가 지나는 부분의 개수는?59)
- ① 4 ② 5 ③ 6
 ④ 7 ⑤ 8

▷ 별 것 아닌 것 같아 보이지만 어렵다.

중심에서 세 평면까지의 거리와 세 축까지의 거리를 구해놓고 머리를 굴려보자.

[2006학년도 수능 21번]

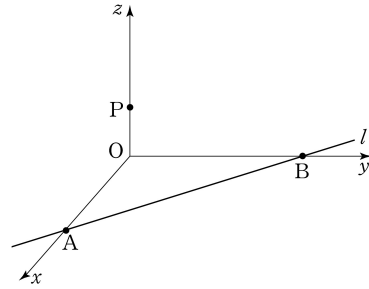
60. 두 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 81$, $x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 56$ 을 각각 S_1 , S_2 라 하자. 두 구 S_1 , S_2 가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy 평면 위로의 정사영을 P'이라 하자. 구 S_1 과 y 축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 PQP'R의 부피의 최댓값을 구하여라.⁶⁰⁾



▷ 교선인 원을 이해한 후,
y축 방향에서 바라보자.

[2006학년도 9월 8번]

61. 좌표공간에서 두 점 $A(1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $P(0, 0, \frac{1}{2})$ 로부터 직선 l 에 이르는 거리는?⁶¹⁾



- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
- ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

▷ 봤던 것 같은데?

- ① 삼수선의 정리에 의해.
- ② 직선 AB 위의 점을 나타내서.

[2006학년도 9월 14번]

62. 좌표공간의 세 점 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$ 에 대하여 선분 BC 를 2:1로 내분하는 점을 P , 선분 AC 를 1:2로 내분하는 점을 Q 라 하자. 점 P, Q 의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 P', Q' 이라 할 때, 삼각형 $OP'Q'$ 의 넓이는?62) (단, O 는 원점이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

▷ 뇌가 있다면.

-
- 1) ①
 - 2) 24
 - 3) ③
 - 4) 127
 - 5) ④
 - 6) 23
 - 7) ①
 - 8) 40
 - 9) ①
 - 10) ②
 - 11) 9
 - 12) ②
 - 13) ③
 - 14) 8
 - 15) ③
 - 16) ②
 - 17) ⑤
 - 18) ④
 - 19) 12
 - 20) 12
 - 21) ④
 - 22) 15
 - 23) ④
 - 24) 162
 - 25) ①
 - 26) ⑤
 - 27) 11
 - 28) ②
 - 29) ⑤
 - 30) 40
 - 31) ②
 - 32) 13
 - 33) 13
 - 34) 32
 - 35) ②
 - 36) ⑤
 - 37) 45
 - 38) ①
 - 39) 10
 - 40) ⑤
 - 41) 30
 - 42) ②
 - 43) ②
 - 44) 20
 - 45) ③
 - 46) 25
 - 47) ⑤
 - 48) ④
 - 49) 30
 - 50) ②
 - 51) 11
 - 52) 27
 - 53) ②
 - 54) 11
 - 55) 15
 - 56) ③
 - 57) ②
 - 58) 34
 - 59) ③
 - 60) 84
 - 61) ①
 - 62) ①