기출문제 다잡기

평가원의 수준

[평면벡터]

5A ACADEMY
SOOHAN

[2023학년도 수능 기하 26번]

1. 좌표평면에서 세 벡터

$\vec{a}=(2,\ 4)$,　$\vec{b}=(2,\ 8)$,　$\vec{c}=(1,\ 0)$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$,　$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}$ (t는 실수)

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은?[1)]

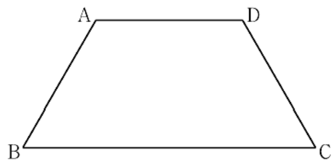
① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

▷ 무난한 자취문항.

[2023학년도 수능 기하 29번]

2. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$, $\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하여라.[2)]

(가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$
(나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$
(다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$



▷ 연습하기 좋은 자취 문항.
계산이 좀 귀찮더라구.

[2023학년도 9월 기하 26번]

3. 좌표평면 위의 점 A(3, 0)에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?3)
(단, O는 원점이다.)

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1
④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

▷ **자취. 준 식에서 바로 보이면 좋고,**
안 보이면 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 놓고 풀어야지 뭐.

[2023학년도 9월 기하 30번]

4. 좌표평면 위에 두 점 A(−2, 2), B(2, 2)가 있다.

$$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\ge 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u}=(1,\ 0)$에 대하여 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u})\ge 0$이다.
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.4)
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ **자취와 최대최소. 30번치고는 무난해 보임.**

[2023학년도 6월 기하 23번]

5. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은?5)
(단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

▷ 평행 ⇔ 실수배

[2023학년도 6월 기하 25번]

6. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

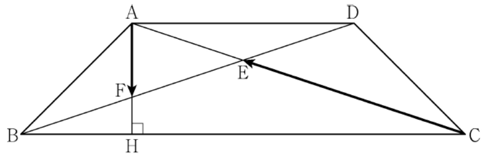
가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?6)

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

▷ 방향벡터와 이루는 각인데,
그냥 $y=$ 정리해서 풀어도 그만.

[2023학년도 6월 기하 27번]

7. $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}=45^\circ$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E,점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$의 값은?7)



① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$

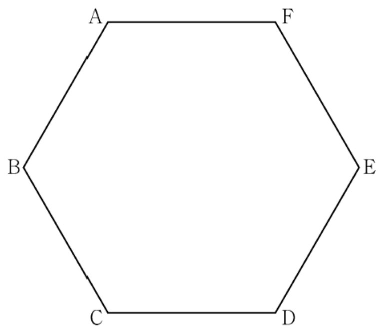
▷ 대충 풀면 됨.

[2023학년도 6월 기하 30번]

8. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}+2\overrightarrow{\mathrm{XD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.8)



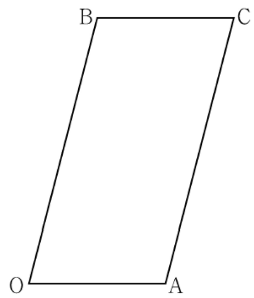
▷ 자취와 최대최소인데, 뭔가 시시하게 마무리.
그림을 칼같이 그려줘야 덜 헷갈린다.

[2022학년도 수능 기하 29번]

9. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.9) (단, a와 b는 유리수이다.)



▷ 계산 루트에 따라서 꽤 고생스러울 수 있다.
30번 자리에 있어야 하는 문항. 좀 심했어.

[2022학년도 9월 기하 25번]

10. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(3,\ 0),\quad \vec{b}=(1,\ 2),\quad \vec{c}=(4,\ 2)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b},\quad |\vec{q}-\vec{c}|=1$$

을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은?10)

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

▷ 좌표에 넣으면 끝이지만, 어떤 의미에서는 벡터의 자취와 최대최소에 가깝군요.

[2022학년도 9월 기하 30번]

11. 좌표평면에서 세 점 A$(-3,\ 1)$, B$(0,\ 2)$, C$(1,\ 0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=2,\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자. 선분 AP_0위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}_0}\geq 1$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{X}}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.11) (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ 자취와 최대최소. 전형적이라면 적형적인데, 복잡하게 가네.

[2022학년도 6월 기하 30번]

12. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$ (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$이다. (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.[12] (단, O는 원점이다.)

▷ 자취와 최대최소.
1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}=k$의 자취, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최대/최소
2. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=k$의 자취, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최대/최소

[수능 예시문항 기하 24번]

13. 좌표평면에서 점 A(4, 6)과 원 C 위의 임의의 점 P에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=3$$

일 때, 원 C의 반지름의 길이는?[13] (단, O는 원점이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ $|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP}$가 우아하다.
$P(x, y)$라 두고 푸는 것은 촌스러워.

[2020학년도 수능 1번]

14. 두 벡터 $\vec{a}=(3, 1)$, $\vec{b}=(-2, 4)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$의 모든 성분의 합은?[14]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

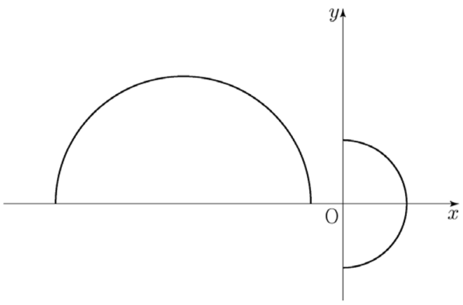
▷ 빈출 킬러문항.

[수능 예시문항 기하 28번]

15. 좌표평면에서 반원의 호 $x^2+y^2=4\ (x \geq 0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2$

를 만족시키는 반원의 호 $(x+5)^2+y^2=16\ (y \geq 0)$ 위의 점 Q가 하나뿐일 때, $a+b$의 값은?15) (단, O는 원점이다.)



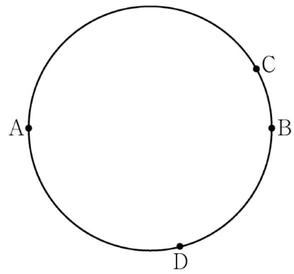
① $\frac{12}{5}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{13}{5}$
④ $\frac{27}{10}$　⑤ $\frac{14}{5}$

▷ 일단 내적의 기하적 해석에다가..
점 P에 따라 점 Q가 움직이는데,
하나뿐이라는 게 뭔가.. 이중자취랄까.

[2020학년도 수능 19번]

16. 한 원 위에 있는 서로 다른 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$의 값은?16)

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=8$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$



① 32　② 34　③ 36
④ 38　⑤ 40

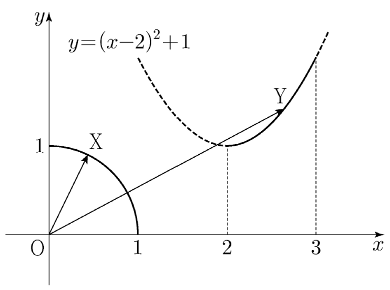
▷ ① 지름 발견, ② 필요한 각 확인.

[2020학년도 9월 19번]

17. 좌표평면 위에 두 점 A(1, 0), B(0, 1)이 있다. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직이는 점 X와 함수 $y=(x-2)^2+1$ $(2 \le x \le 3)$의 그래프 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역을 R라 하자.
점 O로부터 영역 R에 있는 점까지의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, M^2+m^2의 값은?[17)]
(단, O는 원점이다.)

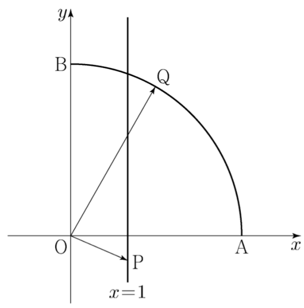


① $16-2\sqrt{5}$ ② $16-\sqrt{5}$ ③ 16
④ $16+\sqrt{5}$ ⑤ $16+2\sqrt{5}$

▷ 이때쯤 대두된 합벡터 종점의 영역 문항.
① [2019학년도 수능 29번],
② [2020학년도 6월 29번],
③ [2020학년도 9월 19번]
의 출제 순서대로 풀자. 이 문제의 특징은, 합벡터로 돌리는 것이 해석하기 좋다는 것.

[2020학년도 6월 18번]

18. 좌표평면 위에 두 점 A(3, 0), B(0, 3)과 직선 $x=1$ 위의 점 P(1, a)가 있다. 점 Q가 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB의 호 AB 위를 움직일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(a)=5$가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?[18)] (단, O는 원점이다.)



① $-5\sqrt{3}$ ② $-4\sqrt{3}$ ③ $-3\sqrt{3}$
④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $-\sqrt{3}$

▷ 얘도 합벡터 종점의 영역과 비슷한 맛.

차분하게 따져보면 전혀 다른 유형이다.
[점 P는 고정, 점 Q가 움직일 때]인데,
(특히 시험 때는) 판단하기가 쉽지는 않았다.

두 점 P, Q를 막 움직이다가 패-닉.

[2020학년도 6월 22번]

19. 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$에 대하여 벡터 $10\vec{a}$의 모든 성분의 합을 구하여라.19)

▷ 10배나 하다니. 쉽지 않네.

[2020학년도 6월 26번]

20. 좌표평면에서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$에서의 접선을 l, 원점을 지나고 방향벡터가 $(1,\ 1)$인 직선을 m이라 하고, 두 직선 $l,\ m$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$일 때, 두 수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하여라.20) (단, O는 원점이고, $a>b>0$이다.)

▷ 은근히 많이 틀리던데. 차분하게 풀어봐.

대부분은 내적보다 삼각함수 덧셈정리로 다루지 않으려나 싶은데. 양 쪽 다 해봐.

[2020학년도 6월 29번]

21. 좌표평면에서 곡선 $C: y=\sqrt{8-x^2}\ (2\le x\le 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자. 점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자. 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하여라.21) (단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

▷ [2019학년도 수능 29번]이 잘 못 만들어진 것이 아니라는 항변. 태생부터 망한 유형인데 그냥 버리지. [2019학년도 6월 29번] 좋았는데.

그나마 완성도는 [2019학년도 수능 29번]에 비해서 높다. 영역 그리기가 비교적 까다롭고, 내적의 최대최소가 나름 중요하니.

[2019학년도 수능 29번]

22. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.22) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ 충격과 공포였던 수능 [29번].

당연히 고난도 공도벡 문항 자리에 평면 벡터,
그것도 진부한 (수능에서는 새로운) 유형이라니.
난 이때 평가원이 맛이 갔다는 것을 확신했다.

$\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})$ 먼저 하고 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$를 더하자.

[2019학년도 9월 16번]

23. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(8, 6)에 대하여 점 P가

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=\sqrt{10}$$

을 만족시킨다. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하고, 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MQ}$의 값은?23) (단, O는 원점이다.)

① $\frac{6\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{10}}{5}$
④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $\frac{18\sqrt{10}}{5}$

▷ 중점 분해, 자취, 내적의 최대최소.
웰메이드 문항. [16번] 치고 조금 어렵다.

[2019학년도 6월 29번]

24. 좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle \mathrm{CAB})=\dfrac{3}{5}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하여라.[24] (단, a, b는 유리수이다.)

▷ 이상한 영역 문항들이 나오기 전, 가장 중요하다고 생각되던 유형.

[벡터의 자취와 최대최소]

대표적인 문항이고, 잘 만들어져 있다.
계산이 조금 복잡하다는 것이 단점.

[2018학년도 수능 25번]

25. 좌표평면 위의 점 $(4,\ 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,\ 2)$에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$라 하자. $a+b$의 값을 구하여라.[25]

▷ 법선벡터를 이용한 직선의 표현.
교과서에 있다구!

[2018학년도 9월 19번]

26. 좌표평면에서 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 세 점 A_1, A_2, A_3에 대하여

$$|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\le 1 \text{ 이고 } \overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ge 0\ (k=1,\ 2,\ 3)$$

을 만족시키는 모든 점 X의 집합이 나타내는 도형을 D라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[26]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$이면 D의 넓이는 $\dfrac{\pi}{2}$이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$이면 D는 길이가 2인 선분이다.

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=0$인 경우에, D의 넓이가 $\dfrac{\pi}{4}$이면 점 A_3은 D에 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 내적과 자취. 중요한 유형이다.
문항의 설정이 조금 유치하지만.

[2018학년도 6월 11번]

27. 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(4,\ -2)$가 있다. 벡터 $\vec{v}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{v}+\vec{b}$가 서로 평행할 때, $|\vec{v}|^2$의 최솟값은?27)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

▷ 평행하다. ⇔ ______.

[2018학년도 6월 25번]

28. 좌표평면 위의 점 $(6,\ 3)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(2,\ 3)$에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2$의 값을 구하여라.28)

▷ 방향벡터를 이용한 직선의 표현.

[2018학년도 6월 29번]

29. 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
(나) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{PA}}\rvert^2+\lvert\overrightarrow{\mathrm{PB}}\rvert^2=20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 m이고 이때 $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert=k$이다. $m+k^2$의 값을 구하여라.29)

▷ 가장 먼저 판단해야 하는 것은
점 P가 ______________에 놓인다는 것.

$\lvert\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}\rvert^2$에 착안하면 개꿀인데, 운이다.

선분 AB의 중점 M을 이용하는 풀이를
꼭 해보도록 하자. 중요한 해석방법.

[2017학년도 9월 8번]

30. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$이고, 두 벡터 $6\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?30)

① $-\frac{3}{10}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{9}{10}$
④ $-\frac{6}{5}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

▷ ① 수직 ⇔ 내적값이 ___.
② 교환/분배 등 내적의 연산.

[2017학년도 6월 1번]

31. 벡터 $\vec{a}=(3,\ -1)$에 대하여 벡터 $5\vec{a}$의 모든 성분의 합은?31)

① -10 ② -5 ③ 0
④ 5 ⑤ 10

▷ 왜 남겨놨지?

[2017학년도 9월 16번]

32. 직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?32)

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$
ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 이런 문항은 풀이의 방향을 잡는 요령이 필요하다. [시점을 고정]하는 관점이 개중요. 모든 벡터의 시점을 A가 되도록 나타내보자.

ㄱ/ㄴ/ㄷ을 따라가면서 푸는 것도 가능하다.

[2017학년도 6월 12번]

33. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3},\quad \frac{x+2}{-1}=\frac{y+1}{3}$$

이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?33)

① $\frac{\sqrt{6}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$

④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

▷ 방향벡터를 이용한 직선의 표현인데,
대충 $y=(\ldots)$으로 정리해서 풀면 된다.

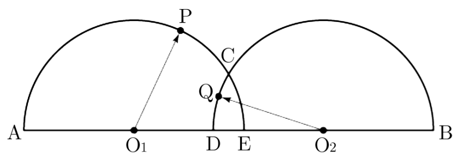
[2017학년도 6월 23번]

34. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ k)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하여라.34)

▷ 군대각.

[2017학년도 6월 28번]

35. 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DB}}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{O_1A}}=\overline{\mathrm{O_2B}}=1$인 두 점을 $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$라 하자. 호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.35) (단, $1<\overline{\mathrm{O_1O_2}}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



▷ 적당히 옮겨서 더하면 좋다.
두 벡터가 이루는 각이 필요한데,
보통 내적보다는 코사인법칙이 편하지.

[2016학년도 9월 6번]

36. 좌표평면 위의 네 점 O$(0,\ 0)$, A$(4,\ 2)$, B$(0,\ 2)$, C$(2,\ 0)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 값은?[36]

① -4　　② -2　　③ 0
④ 2　　⑤ 4

▷ 군대각.

[2015학년도 9월 5번]

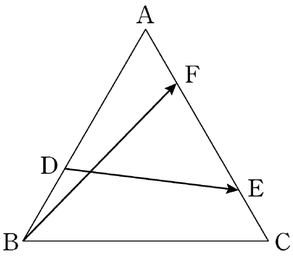
37. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은?[37]

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

▷ 분배하고..

[2014학년도 9월 11번]

38. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 $3:1$과 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값은?[38]



① 17　　② 18　　③ 19
④ 20　　⑤ 21

▷ 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$를 분석하는 것은 괴롭다.

추천하는 풀이는
① $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$로 나타낸다든가,
② 좌표에 올린다든가.

[2013학년도 수능 26번]

39. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.39) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ **수직 분해. $\overrightarrow{PB}=$_________로 보면 좋을 각.**
좌표에 올려도 좋다. 좌표는 항상 옳다.

[2012학년도 수능 8번]

40. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2$, $\angle B=90^{\circ}$, $\angle C=30^{\circ}$이다. 점 P가 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$의 값은?40)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

▷ **차분하게 그리면 된다.**

[2012학년도 9월 2번]

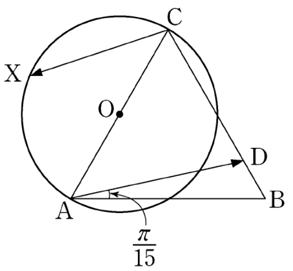
41. 두 벡터 $\vec{a}=(x+1,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -x)$가 서로 수직일 때, x의 값은?41)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ **내적값이 0이다.**

[2011학년도 수능 22번]

42. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle \mathrm{DAB} = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CX}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle \mathrm{ACP} = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[42] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



▷ 내적의 최대최소 시그니처 문항.

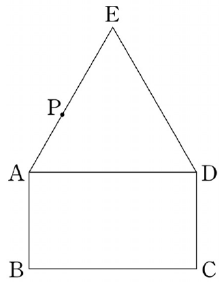
양쪽을 이용해서 다뤄보자.

① 원의 중심을 이용한 분해.

② 내적의 기하적 의미

[2011학년도 9월 14번]

43. 평면에서 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}} = 1$이고 $\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[43]



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CP}}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CP}} =$______.

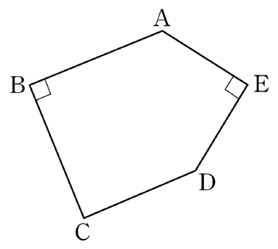
ㄴ. 두 선분 AC, AE가 이루는 각 조사.

ㄷ. 시점과 종점을 맞춰서 적당히 옮기기.

좌표에 올리면 모든 고민 해결!

[2010학년도 수능 14번]

44. 평면에 놓은 그림과 같은 오각형 ABCDE가 $\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{DE}$, $\angle B=\angle E=90^\circ$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[44)]



<보 기>

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

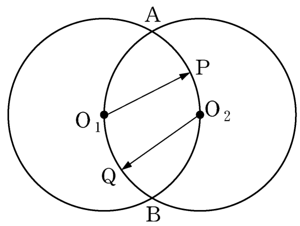
ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 디귿은 제곱해서 니은을 끼얹으면 가장 예쁘다.
대충 그려서 판단하는 것도 가능하다.

[2009학년도 9월 7번]

45. 평면 위의 두 점 O_1, O_2 사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?[45)]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

▷ 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기가 정해져 있을 때, 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 크기는 이루는 각의 크기에 의해 결정된다. $|\vec{a}+\vec{b}|^2$ 전개해보면 간명하게 이해된다.

[2007학년도 수능 20번]

46. 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OF}}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하여라.46) (단, O는 원점이다.)

▷ 묘하게 어려울 수 있는 문제.
벡터를 적당히 옮겨서 더해보자.

[2005학년도 9월 3번]

47. 크기가 1인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족할 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기는?47) (단, $0\le\theta\le\pi$)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

▷ 제곱yo.

[2006학년도 수능 4번]

48. 좌표평면 위에 원점 O를 시점으로 하는 서로 다른 임의의 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$가 있다. 두 벡터의 종점 P, Q를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 P′, Q′이라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?48)

<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|=\sqrt{10}$
ㄴ. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}|$
ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 대충 풀러.

1) ②
2) 12
3) ③
4) 17
5) ③
6) ②
7) ④
8) 8
9) 100
10) ②
11) 45
12) 48
13) ④
14) ⑤
15) ⑤
16) ⑤
17) ①
18) ③
19) 30
20) 48
21) 24
22) 53
23) ③
24) 31
25) 9
26) ⑤
27) ⑤
28) 52
29) 7
30) ②
31) ⑤
32) ⑤
33) ⑤
34) 8
35) 19
36) ⑤
37) ②
38) ③
39) 7
40) ③
41) ①
42) 17
43) ⑤
44) ⑤
45) ②
46) 15
47) ③
48) ③