기출문제 다잡기

평가원의 수준

[적분법]

5A ACADEMY
SOOHAN

[2023학년도 수능 미적분 24번]

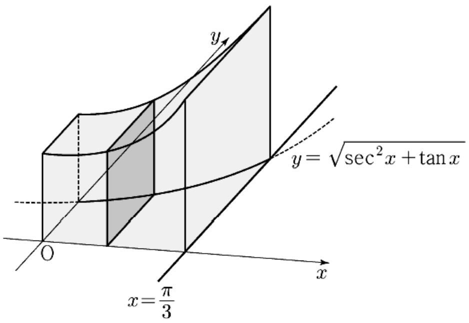
1. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은?[1)]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

▷ 급수를 정적분으로 바꾸는 문제 잘 나온다.
공부 끝까지 잘 했는지 체크하기 좋은 문제.

[2023학년도 수능 미적분 26번]

2. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는?[2)]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

▷ 단면의 넓이를 적분. 적분도 약간 난이도 줄 수 있고.

[2023학년도 수능 미적분 29번]

3. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

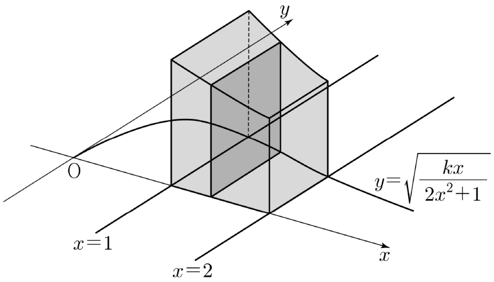
(가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^x}=1$
(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,
$\int_0^{14} g(x)dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하여라.[3)]
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

▷ 역함수 적분인지 영의 정리인지 그거.
몇 번 다뤄봤다면 딱히 어렵지 않았을 듯.

[2023학년도 9월 미적분 26번]

4. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은?4)



① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

▷ 부피.

[2023학년도 9월 미적분 30번]

5. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x)\geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x\leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f(-3)$이다.
(나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)dx=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.5)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ 사실 적분보다는 함수 추론에 가까운 문항.
조건들을 조합하면 $f(x)$의 도함수를 잡을 수 있다.

나머지는 미적분의 하우 투 적분 요소가 살짝.

[2022학년도 수능 미적분 26번]

6. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$ 의 값은?6)

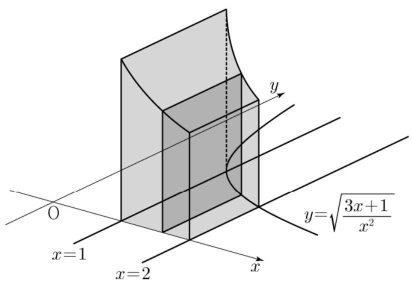
① $\ln5$ ② $\frac{\ln5}{2}$ ③ $\frac{\ln5}{3}$

④ $\frac{\ln5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln5}{5}$

▷ $\frac{1}{n}$ 하나 뽑아내고 나머지는 $\frac{k}{n}$의 함수로.

[2022학년도 9월 미적분 26번]

7. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{3x+1}{x^2}}\ (x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는?7)



① $3\ln2$ ② $\frac{1}{2}+3\ln2$ ③ $1+3\ln2$

④ $\frac{1}{2}+4\ln2$ ⑤ $1+4\ln2$

▷ 자주 나옴.

[2022학년도 수능 미적분 27번]

8. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는?8)

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$

④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

▷ 곡선의 길이. 완전제곱식 나오겠지 뭐.

[2022학년도 수능 미적분 30번]

9. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

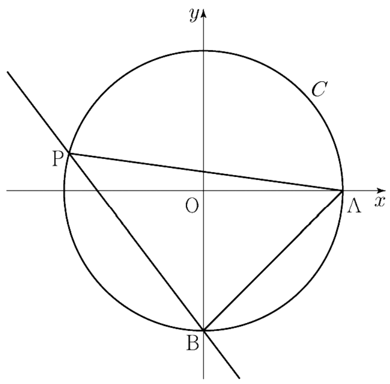
> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.9)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ (나) 식에 적분 걸면 대충 보임.
연산 베이스 문항이지만 그래프 개형 살살 그려가며 추적.

[2022학년도 9월 미적분 28번]

10. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -2)$가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$라 하자. 점 $\mathrm{Q}(0,\ 2\cos\theta)$에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은?10)



① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

▷ 도형문항인데 Q를 해석적으로 주니,
식으로 풀려다 말린 학생 있을 듯.
그게 나야. 두비두밥.

[2021학년도 수능 8번]

11. 곡선 $y=e^{2x}$과 x축 및 두 직선 $x=\ln\frac{1}{2}$, $x=\ln 2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?11)

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{15}{7}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

▷ 그냥.

[2021학년도 수능 11번]

12. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$ 의 값은?12)

① $4\sqrt{3}-6$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $5\sqrt{3}-8$
④ $2\sqrt{3}-3$ ⑤ $3\sqrt{3}-5$

▷ 급수를 정적분으로. $\frac{1}{n}$ 하나를 뽑아내면 나머지는 $\frac{k}{n}$의 함수로 나타나야 한다.

[2021학년도 수능 15번]

13. $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2-\frac{3}{x^2}, \qquad f(1)=5$$

이다. $x<0$에서 미분가능한 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-3)$의 값은?13)

(가) $x<0$인 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $f(2)+g(-2)=9$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ $g'(x)=f'(-x)$에서 $g(x)=-f(x)$로 털리는 애들 없을까? 적분하려면 $g(x)=-f(x)+C$가 맞다.

애초에 딱딱하게 식으로 다루는 것을 추천하고 싶지 않지만. 그래프를 그린다든가 해서.

[2021학년도 수능 20번]

14. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0,\ 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은?14)

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

▷ 21번 나왔어야 하는 문항. 킬러급.

최대 찍으려면 경계를 따라서 적분해야 한다.

[수능 예시문항 미적분 23번]

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$의 값은?15)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

▷ 알오?

[수능 예시문항 미적분 27번]

16. 곡선 $y=x\ln(x^2+1)$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?16)

① $\ln 2-\frac{1}{2}$ ② $\ln 2-\frac{1}{4}$ ③ $\ln 2-\frac{1}{6}$
④ $\ln 2-\frac{1}{8}$ ⑤ $\ln 2-\frac{1}{10}$

▷ 치환각.

[수능 예시문항 미적분 29번]

17. 함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하여라.17)

▷ [역함수를 이용한 치환적분].

묘하게 안 풀리는 학생이 있을 것이다. 정상이다.
평소의 치환적분과 치환 방향이 반대이기 때문.

평가원 이상에서는 처음으로 출제되었다.
풀이는.. 음.. 유튜브 찾아봐.

[2021학년도 9월 18번]

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?18)

<보 기>

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.
ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$
ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 여러모로 특이한 문항.
뭔가 좀 논술같기도 하고..

대충 $g(x)=f(x)f(1-x)$와 $g(x)$의 개형을 잡아보자. ㄷ은 ㄴ없이 푸는 것이 좋다. ㄴ으로 풀면 오류인데, 평가원 애들도 착각한 듯.

[2021학년도 9월 20번]

19. 함수 $f(x)=\sin(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf(x-t)dt\ (x\geq 0)$$

이 $x=a$에서 극대인 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $k^2<a_6<(k+1)^2$인 자연수 k의 값은?[19)]

① 11 ② 14 ③ 17
④ 20 ⑤ 23

▷ 우선 $g(x)$의 형태가 익숙해야 한다.
[2014학년도 6월 27번]에서 봤다.

이후 적분값의 크기비교가 필요한데,
대충 커지는 것이 당연해 보여서..

근데 알고 보니까 적분이 계산 되더라구?
일종의 [역함수를 이용한 치환]이라 못 봤다구.

[2021학년도 9월 25번]

20. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4=a$일 때, $5a$의 값을 구하여라.[20)]

▷ 오답률 폭발! 50%쯤 됐었나.

[2020학년도 수능 7번]

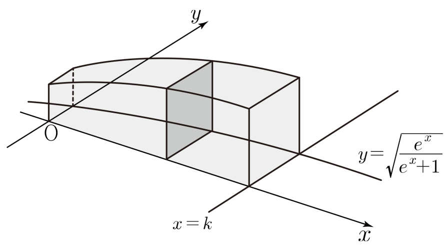
21. $\int_e^{e^2}\frac{\ln x-1}{x^2}dx$의 값은?[21)]

① $\frac{e+2}{e^2}$ ② $\frac{e+1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ $\frac{e-1}{e^2}$ ⑤ $\frac{e-2}{e^2}$

▷ 하우 투 적분은 누구나 움찔할 수 있다.

[2020학년도 수능 11번]

22. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\dfrac{e^x}{e^x+1}}$과 x축, y축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $\ln 7$일 때, k의 값은?22)



① $\ln 11$　② $\ln 13$　③ $\ln 15$　④ $\ln 17$　⑤ $\ln 19$

▷ ① 축 설정.
② 축에 수직으로 자른 단면의 넓이.

[2020학년도 수능 21번]

23. 실수 t에 대하여 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 $a,\ b(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)dt=m$이라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?23)

<보 기>

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 $a,\ b(a<b)$가 존재한다.
ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.
ㄷ. $a=\alpha,\ b=\beta(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

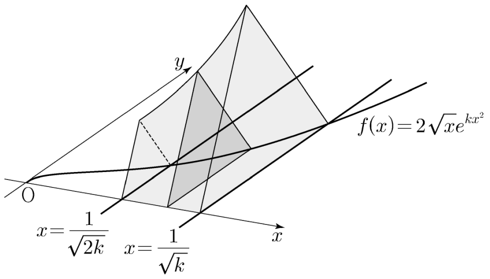
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 매우 좋다. 요즘 평가원이 이 정도 퀄리티의 문항을 생산하다니! 니은의 함수 $g(t)$의 특성이 재미있고, 전체적인 보기의 밸런스나 배치도 좋다. 앞부분에서 쓸데없이 귀찮게 한 것이 옥의 티.

문항으로서는 아름답지만 [21번]에 합답형을 출제했다는 것에서 낙제점. 어차피 답은 _____.

[2020학년도 9월 14번]

24. 그림과 같이 양수 k에 대하여 함수 $f(x)=2\sqrt{x}\,e^{kx^2}$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피가 $\sqrt{3}(e^2-e)$일 때, k의 값은?[24)]



① $\dfrac{1}{12}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{1}{2}$

▷ 시시한 부피 문항.

[2020학년도 9월 17번]

25. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x^4-1$이다.
(나) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2g'(x)dx=120$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx$의 값은?[25)]

① 12　② 15　③ 18
④ 21　⑤ 24

▷ 웰메이드. 여러 가지 방법으로 다룰 수 있다. 꽤 난이도가 있다고 생각했는데, 모재수학원의 정답률이 90% 정도로 매우 높더라.

[2020학년도 9월 30번]

26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하여라.26)

▷ 희대의 쓰레기 30번. 이런 문항을 버젓이 출제하다니, 역시 평가원. 대단한 멘탈.

대입 순서, 대칭성 등 몇 가지 관찰 포인트가 있긴 하지만, 어떻게 봐도 쓰레기는 쓰레기.

[2019학년도 수능 21번]과 같이 만들어진 느낌.
__________은 당시 강력하게 예상되던 주제였다.
계산이 아주 심한 것은 아니지만 짜증난다.

[2020학년도 6월 10번]

27. $\int_1^e x^3 \ln x dx$의 값은?27)

① $\frac{3e^4}{16}$ ② $\frac{3e^4+1}{1}$ ③ $\frac{3e^4+2}{16}$
④ $\frac{3e^4+3}{16}$ ⑤ $\frac{3e^4+4}{16}$

▷ 뭘 해볼까.

[2020학년도 6월 20번]

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)>0$
> (나) $\ln f(x)+2\int_0^x (x-t)f(t)dt=0$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?28)

<보 기>

ㄱ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1)+\{F(1)\}^2=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 일단 $\int_0^x (x-t)f(t)dt$의 미분.

모르면 수2 복습 필요한 상태일걸.

기억, 니은은 함수의 개형(+부호) 파악.
디귿이 __________이다. 게다가 강조.

쉬운 문항은 아닌데 답이 _____라서.

[2020학년도 6월 30번]

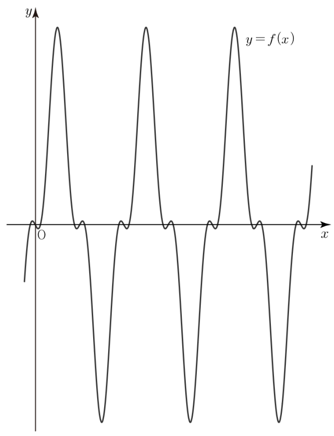
29. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하여라.29)
(단, p와 q는 유리수이다.)



▷ 10점 만점에 0.5점.

일단 $\int \frac{t}{f'(x_n)}dt$라는 표현이 다소 무리가 있고,

[역함수를 이용한 치환적분]이 애매하게 들어왔다.

무의미한 시그마도 참 촌스럽다.

[2019학년도 수능 16번]

30. $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x)+\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)dx$의 값은?30)

① $\frac{\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\ln 2}{3}+1$
④ $\frac{2\ln 2}{3}+1$ ⑤ $\frac{2\ln 2}{3}+\frac{3}{2}$

▷ [정적분과 구간]의 대표문항.
x가 $1/2$에서 2까지 변할 때,
$1/x$은 2에서 $1/2$까지 변한다.

[2019학년도 수능 21번]

31. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?31)

(가) 모든 실수 x에 대하여
$2\{f(x)\}^2 f'(x)=\{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

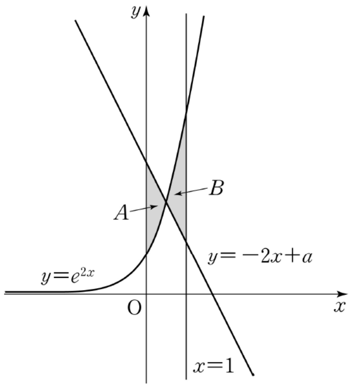
① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$
④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

▷ 본격적인 [항등식의 양변적분] 문항.
유치하고, 지엽적이고, 의미 없고, 재미 없고..

일단 양변 적분각은 딱 보이지? 적분상수 조심.
그 다음이 핵심이다. x를 $2x+1$로 대응시키는 함수를 이용하여 $-\frac{1}{8}$과 6을 연결해야 한다.

[2018학년도 수능 12번]

32. 곡선 $y=e^{2x}$과 y축 및 직선 $y=-2x+a$로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=e^{2x}$과 두 직선 $y=-2x+a$, $x=1$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값은?[32) (단, $1<a<e^2$)



① $\frac{e^2+1}{2}$ ② $\frac{2e^2+1}{4}$ ③ $\frac{e^2}{2}$
④ $\frac{2e^2-1}{4}$ ⑤ $\frac{e^2-1}{2}$

▷ 교점 구하려고 하면 안 돼.

[2018학년도 수능 15번]

33. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$$

일 때, $(f\circ f)(a)=\ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은?[33)
① $\ln 11$ ② $\ln 13$ ③ $\ln 15$
④ $\ln 17$ ⑤ $\ln 19$

▷ 가끔 말리는 학생들 있던데..
일단 적분해서 $f(x)$를 구해.

[2019학년도 수능 25번]

34. $\int_0^{\pi} x\cos(\pi-x)dx$의 값을 구하여라.[34)]

▷ 여각변환. $\cos(\pi-x)=$_____

[대칭성을 이용한 치환]이라고, 형태가 $\pi-x$를 치환하고 싶게 생겼다. 이 문제에서는 무의미.

[2019학년도 6월 12번]

35. $x=0$에서 $x=\ln 2$까지의 곡선 $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$의 길이는?[35)]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

▷ 곡선의 길이 공식 알지?
이 문제 계산 짜증나는 것도 알고?

[2019학년도 6월 11번]

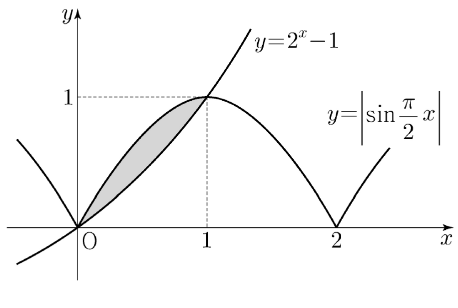
36. $\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$의 값은?[36)]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

▷ 치환각 보이니.

[2019학년도 9월 9번]

37. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$가 원점 O와 점 (1, 1)에서 만난다. 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$로 둘러싸인 부분의 넓이는?[37)]



① $-\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$ ② $\frac{2}{\pi}-\frac{1}{\ln 2}+1$
③ $\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2\ln 2}-1$ ④ $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2\ln 2}+1$
⑤ $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\ln 2}-1$

▷ 그림 안 그려주면 어렵겠다.

[2019학년도 9월 21번]

38. 0이 아닌 세 정수 l, m, n이

$$|l|+|m|+|n| \le 10$$

을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l+2m+3n$의 값은?[38)]

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

▷ 매우 어렵다. 안 풀려도 스트레스 받지 말고.
덮어 뒀다가 여름 지나서 풀어도 좋다.

[2016학년도 6월 30번]과 여러모로 닮아 있다.
소재가 작위적인 느낌이 있지만 나름 신선하고,
전체적으로 깔끔한 문항. 주어지는 합격목걸이.

[2019학년도 6월 15번]

39. 함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt\right\}=3$$

일 때, $f(a)$의 값은?[39)] (단, a는 상수이다.)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

▷ $\lim_{x\to 0}\left\{(x^2+1)\times\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$으로 줬다면
훨씬 쉬웠겠지? 0이 어디에 있는지 신경 썼다면.

[2019학년도 6월 30번]

40. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하여라.40)

▷ [2015학년도 9월 30번]에서 따온 듯한 문항,

억지로 끼워 맞춘 듯한 숫자들, 욕이 절로 나오는 계산량, 쓰레기 같은 표현. 총체적 난국.

[2018학년도 수능 30번]

41. 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을
> $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)
> 라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$의 값을 구하여라.41)

▷ 매우 어렵다. 수능 역사에서 가장 어려운 문제라 생각되는데? 분석하려면 두, 세시간 잡아도 좋다. 상황 이해도 어렵고, 호흡도 길고, 계산도 복잡.

[2018학년도 9월 18번]

42. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\ f(t))(t>0)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 점 A를 지나고 점 A에서의 접선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. 모든 양수 t에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t})$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는?[42)]

① $e-2$ ② e ③ $e+2$
④ $e+4$ ⑤ $e+6$

▷ 잘 모르고 지나가는 경우가 많은데,
[항등식의 양변 적분]의 시초격.

대충 봐도 ______________가 나온다. 여기서
양변 적분하고 적분상수 처리해야 옳은 풀이.

[2018학년도 9월 21번]

43. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=-1,\ a_n=2-\frac{1}{2^{n-2}}(n\geq 2)$$

이다. 구간 $[-1,\ 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x)=\sin(2^n\pi x)\ \ (a_n\leq x\leq a_{n+1})$$

이다. $-1<\alpha<0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t}f(x)dx=0$을 만족시키는 $t\,(0<t<2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1-\cos(2\pi\alpha))$의 값은?[43)]

① -48 ② -50 ③ -52
④ -54 ⑤ -56

▷ [2016학년도 9월 21번]을 완성한 문항.
소재는 좋은데 표현이나 계산이 좀 질척거린다.

어렵긴 하지만 언제든 반복될 가능성이 있는
중요한 주제이므로 차분하게 다뤄보자.

[2018학년도 6월 12번]

44. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_1^x f(t)dt = x^2 - a\sqrt{x} \quad (x>0)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?[44] (단, a는 상수이다.)

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

▷ 대입하고 양변 미분. 알좀?

[2018학년도 6월 30번]

45. 실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2, $\cdots$, α_m(m은 자연수)이다. $a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하여라.[45]

▷ 일단 중요한 주제, [정적분으로 정의된 함수], 그 중에서도 [x축의 위치 결정]이 강조되어 있다.

(나)는 대칭성으로 처리하는 것이 보통.
유식하게 보이고 싶을 때 [테셀레이션]이라 한다.
특이한 접근으로, $1\times g(x)$에서 부분적분 거는 것도 가능하다. 정적분의 연산 문제로 착각해서..?

[2017학년도 수능 20번]

46. 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?46)

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$
ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 a가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.
ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 b가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 사잇값인지 평균값인지 해야겠지?

디금의 정해는 구간 _____에서 함수 _____에 대한 __________이다. 선지들 사이의 연계성.

양수를 순방향 적분하면 양수겠지?
교과서에는 없는데, 기역 풀 때 필요하다.

[2017학년도 수능 21번]

47. 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ \ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은?47)

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

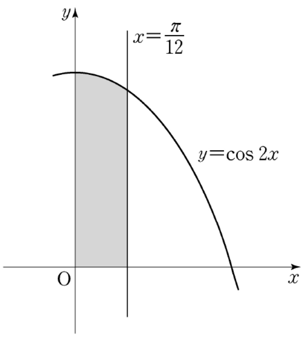
▷ 이때 평가원이 좋았다. 대충 $f(x)F(x)$가 적분가능하다는 것은 요즘 더더욱 중요한 소재.

$f(x)=0$의 근을 α라 하자.
$x\le\alpha$일 때는 $F'(x)=$______
$x>\alpha$일 때는 $F'(x)=$______

$f(x)F(x)$는 부분적분 걸어도 된다. 삽질이지만.

[2017학년도 9월 13번]

48. 함수 $y=\cos 2x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=\dfrac{\pi}{12}$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=a$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?48)



① $\dfrac{1}{2\pi}$ ② $\dfrac{1}{\pi}$ ③ $\dfrac{3}{2\pi}$

④ $\dfrac{2}{\pi}$ ⑤ $\dfrac{5}{2\pi}$

▷ 군대각.

[2017학년도 9월 21번]

49. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$
(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1)=\dfrac{1}{e}$일 때, $f(2)-g(2)$의 값은?49)

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$

④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

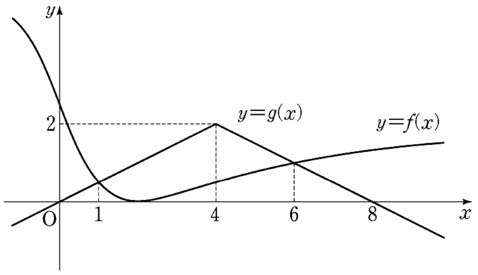
▷ [정적분의 연산]은 다양하게 말릴 수 있다.

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ 또는 $\displaystyle\int x^2 e^{-x^2}dx$를 띄우는 것이 털리는 비결이다. 정답은 (나)의 피적분함수를 ________로 보고 부분적분을 치는 것.

_____의 미분이 주어졌고, _____이 적분가능하다.

[2017학년도 6월 20번]

50. 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은?50)

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

▷ 대충 봐도 $a=$_____이 당기지?

$\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$를 $h(a)$라 두고 도함수 $h'(a)$를 조사해보자.

[2017학년도 6월 30번]

51. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $\int_x^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여

$$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$$

일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하여라.51)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ 만만하게 보다가 털리는 문제. 맞게 풀어도 계산이 짜증나는데, 한 번 착각하면..

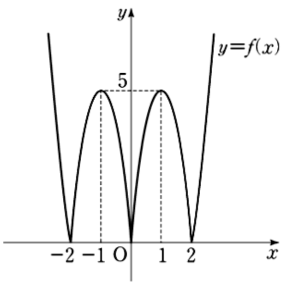
주어진 $f(x)$의 함수식은 구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서만 사용 가능하다. $f(x)$를 더 구하지 않으려면, (나)의 x값은 $-\frac{a}{2}$만을 취할 수 있다.

[2016학년도 수능 11번]

52. 함수

$$f(x)=\begin{cases}|5x(x+2)| & (x<0)\\ |5x(x-2)| & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다. 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는?52)



① $\frac{65}{6}\pi$ ② $\frac{35}{3}\pi$ ③ $\frac{25}{2}\pi$
④ $\frac{40}{3}\pi$ ⑤ $\frac{85}{6}\pi$

▷ 회전체까지는 대충 해 두자. 도형을 x축에 수직인 단면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 넓이는?

[2016학년도 수능 30번]

53. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\leq b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x\sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.53)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ 유행하던 패턴. 깜짝 퀴즈 스타일이랄까. 깔끔하게 냈다. $x>b$인 부분이 비어 보이지?

[2016학년도 9월 21번]

54. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x - |\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?54)
(단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

▷ [정적분으로 정의된 함수]의 [x축 결정].

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$라 두고 $g'(x)=f(x)$를 이용해 $g(x)$의 그래프를 그리자.

근데 미친놈들이 $f(x)$를 잘 못 그리더라구.

[2016학년도 6월 30번]

55. 정의역이 $\{x|0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.55)
(단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.)

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
(나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여
$f(k+t)=f(k)$ $(0<t \le 1)$
또는
$f(k+t)=2^t \times f(k)$ $(0<t \le 1)$
이다.
(다) 열린구간 $(0,\ 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

▷ [별 쓰레기 같은 문제를 다 내네.]라는 생각이 들었던 문항. 망가지는 평가원의 서막이랄까.

조건을 해석해보면 $f(x)$로 두 가지 형태가 가능하다. 두 가지 경우의 적분값을 구해보는 것이 보통. 시험 때는.. 나도 틀렸어.

[2015학년도 수능 9번]

56. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은?56)

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$
④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

▷ 은근히 많이 나왔단 말이야.
$1+\dfrac{2k}{n}=x$로 바꿀 수 있으면 좋고. 아님 말고.

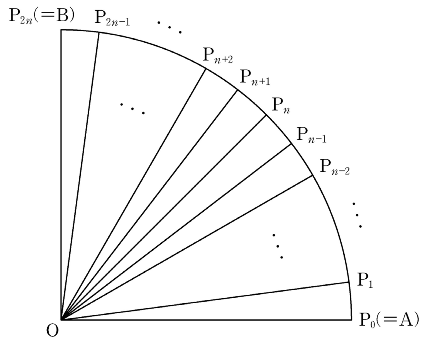
[2015학년도 수능 28번]

57. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.57)

▷ a의 값을 딱 구할 수는 없다. 답은 나온다.
어? [2020학년도 수능 30번]하고 비슷하네?

[2015학년도 9월 13번]

58. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 자연수 n에 대하여 호 AB를 $2n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{P}_0(=\mathrm{A})$, P_1, P_2, $\cdots$, P_{2n-1}, $\mathrm{P}_{2n}(=\mathrm{B})$라 하자. 주어진 자연수 n에 대하여 $S_k(1\le k\le n)$을 삼각형 $\mathrm{OP}_{n-k}\mathrm{P}_{n+k}$의 넓이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k$의 값은?58)



① $\dfrac{1}{\pi}$ ② $\dfrac{13}{12\pi}$ ③ $\dfrac{7}{6\pi}$
④ $\dfrac{5}{4\pi}$ ⑤ $\dfrac{4}{3\pi}$

▷ 두 칸씩 벌어져서 헷갈릴 수 있겠네.

[2015학년도 9월 30번]

59. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
> (다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하여라.59)
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

▷ 중간에 턱 막히기 좋은 문항. (나)의 식에서 [구간을 $+1$씩 민다.]를 발견하면 털린다.

일단 푸는 방법을 하나 제시해줄게.
(나)의 식을 $t=1$부터 $t=x$까지 정적분 걸어라.

[2015학년도 6월 9번]

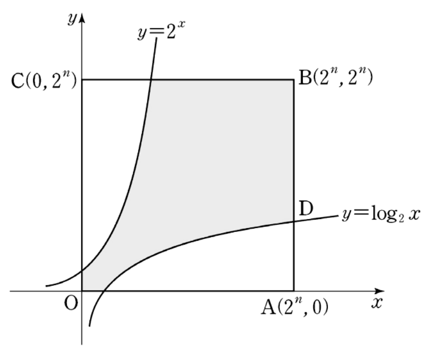
60. 함수 $y=e^x$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이가 직선 $y=ax(0<a<e)$에 의하여 이등분될 때, 상수 a의 값은?60)

① $e-\dfrac{1}{3}$ ② $e-\dfrac{1}{2}$ ③ $e-1$
④ $e-\dfrac{4}{3}$ ⑤ $e-\dfrac{3}{2}$

▷ 구간 찢을 필요 없고.

[2014학년도 9월 14번]

61. 그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2^n,\ 0)$, $\mathrm{B}(2^n,\ 2^n)$, $\mathrm{C}(0,\ 2^n)$인 정사각형 OABC와 그 내부는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는?61)



① $14+\dfrac{12}{\ln 2}$ ② $16+\dfrac{14}{\ln 2}$ ③ $18+\dfrac{16}{\ln 2}$
④ $20+\dfrac{18}{\ln 2}$ ⑤ $22+\dfrac{20}{\ln 2}$

▷ 두 부분이 같아 보이는데, 어느 쪽이 덜 귀찮을까.

[2014학년도 수능 21번]

62. 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_{1}^{x+1}f(t)dt$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_{0}^{1}xf(x+1)dx$의 값은?62)

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ 2π

▷ 말리는 방향이지만 구하는 정적분에서
$x+1$을 치환하고 싶기도 하다. 풀리는 방향은,
[부분적분을 하고 싶다.]라는 생각에서부터.

[2014학년도 9월 30번]

63. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

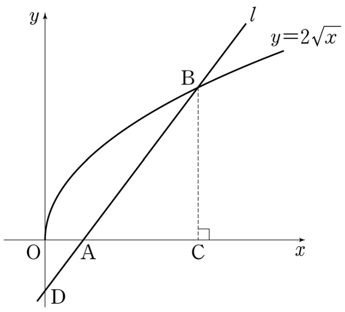
를 만족시키고, $\int_{1}^{e^2}g(x)dx=6e^2+4$이다.
$\int_{1}^{e}f(\ln x)dx=ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.63)
(단, a, b는 정수이다.)

▷ 원래 정적분의 연산 문제는 어디서부터
건드려야 하는 지가 고민스럽다.

결과론적으로, $g(x)$로 돌리는 것이 좋다.
$g(e^x)$에서 $e^x=t$로 나타내는 것부터 시작해보자.

[2014학년도 6월 9번]

64. 점 A(1, 0)을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AD}}=3:1$일 때, 점 B의 x좌표를 a라 하자. x축, 직선 $x=a$, 곡선 $y=2\sqrt{x}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는?64)



① 32π ② 33π ③ 34π
④ 35π ⑤ 36π

▷ 무의미하게 직선 l을 정의한 것은,
원래 세트형 문항이라서 그렇다.

회전체지만 간단한 문항이니 풀어두자.

[2014학년도 6월 27번]

65. 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt \ \ (x\geq 0)$$

일 때, $F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.65)

▷ 일단 $x-t$를 치환하는 각.
변수, 상수 헷갈릴 수 있다. 치환 정확하게.

$f(x-t)=\dfrac{1}{1+x-t}$를 넣고 풀 수 있다.

어렵게 푸는 방법이다.

[2014학년도 6월 18번]

66. 함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[1,\ 2]$를 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$1=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=2$$

라 하자. 세 점 $(0,\ 0)$, $(x_k,\ 0)$, $(x_k,\ f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$의 값은?66)

① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$

④ e^2-e ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

▷ A_k를 $\frac{k}{n}$에 대한 함수로 나타내야겠네.

[2013학년도 수능 12번]

67. 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은?67)

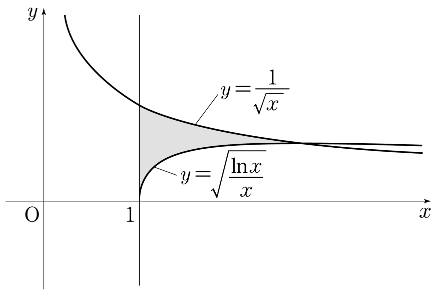
① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$

④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

▷ [정적분과 항등식 타입 I]이다.
양 변 미분했다가 산으로 간다.

[2013학년도 9월 24번]

68. 두 곡선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$ 와 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 V이다. $\dfrac{100V}{\pi}$의 값을 구하여라.68)



▷ 빼서 제곱하면 안 돼.

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2 \neq \{f(x)-g(x)\}^2$

[2013학년도 6월 10번]

69. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = e^x + ax + a$$

를 만족시킬 때, $f(\ln 2)$의 값은?69) (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ e
④ 3 ⑤ $2e$

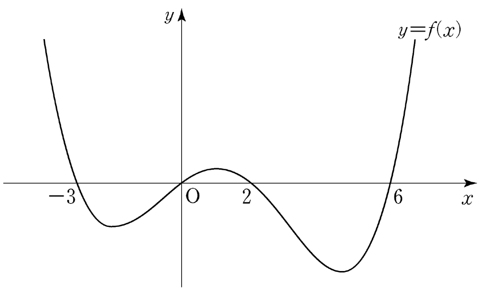
▷ 대입하고 미분하고.

[2013학년도 6월 19번]

70. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$$

을 만족시키는 정수 m의 개수는?[70)]

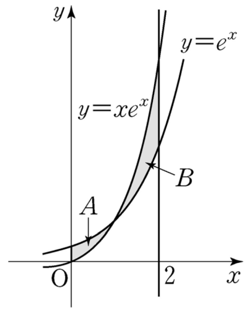


① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

▷ 그냥 잘 바꾸면.

[2012학년도 수능 16번]

71. 그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 y축으로 둘러싸인 부분 A의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분 B의 넓이를 b라 할 때, $b-a$의 값은?[71)]



① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

▷ $b+a$는 짜증날 것 같은데, $b-a$는 간단하네.

[2012학년도 수능 28번]

72. 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를

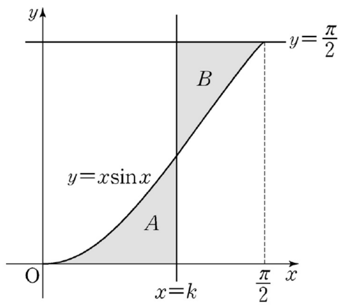
$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하여라.72)

▷ 미분하기 전 $g(2)$를 구하기 위한 조사.
미분하고 대입. 미분은 그냥 합성함수 미분법으로.

[2012학년도 9월 16번]

73. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 이 곡선과 x축, 직선 $x=k$로 둘러싸인 영역을 A, 이 곡선과 직선 $x=k$, 직선 $y=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 영역을 B라 하자. A의 넓이와 B의 넓이가 같을 때, 상수 k의 값은?73) (단, $0 \le k \le \frac{\pi}{2}$)



① $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}$
④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\pi}$　⑤ $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\pi}$

▷ 오른쪽 아래 도형을 양쪽에 붙여도 좋고,
생각하기 싫으면 그냥 풀어도 좋고.

[2012학년도 9월 20번]

74. 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?[74)]

(가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=1$

(나) $\cos x \int_0^x f(t)dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$

(단, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$)

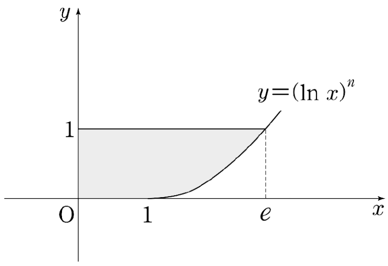
① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

▷ 말리기 좋은 문제. (나)에 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$을 대입했다가 받는 내상이 심하다.

미분은 하긴 해야겠고, 대입도 하긴 해야겠지?

[2012학년도 6월 18번]

75. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n\ (x \ge 1)$과 x축, y축 및 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[75)]



<보 기>

ㄱ. $1 \le x \le e$일 때, $(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$이다.

ㄴ. $S_n < S_{n+1}$

ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n\ (x \ge 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $S_n = \int_0^1 g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 대충. 옛날 문항들은 참 쉽다.

[2012학년도 6월 19번]

76. 정의역이 $\{x|x>-1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x)=x^2$일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$의 값은?76)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{5}{18}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{7}{18}$

▷ $f'(x)$와 $g(x)$를 가지고 있다.
$f(x)g'(x)$를 적분하려면?

[2011학년도 수능 28번]

77. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\,(a>0,\ 0<k<1)$일 때, $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?77)

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2
④ k ⑤ $2k$

▷ 어디서부터 시작하지? 일단 구간은 맞춰야겠고..
$\{f(x)\}^2$의 미분이 $2f(x)f'(x)$인 것에 착안.

[2011학년도 수능 29번]

78. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$의 최솟값은?78)

(가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$ (나) $0<a<b<2$이면 $f'(a) \le f'(b)$이다. (다) 구간 $(0,\ 1)$에서 $f''(x)=e^x$이다.

① $\frac{1}{2}e-1$　② $\frac{3}{2}e-1$　③ $\frac{5}{2}e-1$
④ $\frac{7}{2}e-2$　⑤ $\frac{9}{2}e-2$

▷ 최대한 아래쪽으로 붙여야겠지?
엄밀하게 다룰 필요는 없다.

[2011학년도 9월 11번]

79. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$$

이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?79)

<보 기>

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} \le \int_0^1 f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

▷ [$2n$등분], [사다리꼴합], [왼쪽합]이다. 정리해두자.

[2011학년도 9월 28번]

80. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?80)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ tx를 치환해야 한다. 개헷갈림.
t에 대한 항등식을 줘서 헷갈림 더블.

[2010학년도 수능 21번]

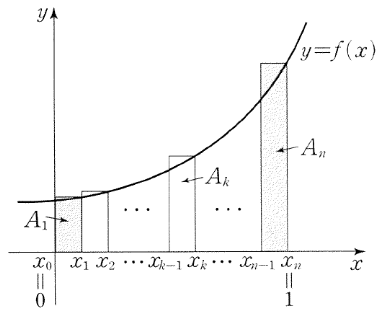
81. 함수 $f(x) = x^2 + ax + b(a \geq 0,\ b > 0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0,\ 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$0 = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 1$$

이라 하자. 닫힌 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1 + A_n = \frac{7n^2 + 1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{n} A_k$의 값을 구하여라.81)



▷ (거의) 항등식 $A_1 + A_n = \frac{7n^2+1}{n^3}$에서
함수 $f(x)$를 구할 수 있다.

[2010학년도 수능 29번]

82. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?82)

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면 $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면 $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 여러 접근이 가능해서 시작이 망설여진다.
부분적분각이나 $1-x$ 치환 정도가 당기는데..
아무거나 해보고 아니면 반대 쪽 해야지 뭐.

[2010학년도 9월 21번]

83. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2 dt = 6\int_0^1 x^3(x-t)^2 dt$$

를 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$, x축, y축으로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $a\pi$라 할 때, a의 값을 구하여라.83)

▷ 좌변 미분 한 번에 할 수 있지? 수2 내용.
회전체의 부피 색이 짙어서 뺄까 싶긴 했다.

[2010학년도 9월 28번]

84. 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$에 대하여 상수 a가 $f(a)=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx$의 값은?84)

① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

▷ $f'(x)=$_____이다. 치환각 바로 잡히네.

[2010학년도 9월 29번]

85. 함수 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?85)

<보 기>

ㄱ. $0<x<1$일 때, $x^2\sin\frac{x^2}{2}<f(x)<\cos\frac{x^2}{2}$이다.
ㄴ. 구간 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.
ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx \le \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

▷ 니은은 디귿의 힌트.

[2009학년도 수능 27번]

86. 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f(1)=1$이며, 열린구간 $(0,\ 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$일 때, $\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은?86)

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

▷ **함수, 역함수의 그래프와 직선 $y=x$의 관계.**

[2009학년도 수능 29번]

87. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_a^x \{2+\sin(t^2)\}dt$$

라 하자. $f''(a)=\sqrt{3}a$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은?87)
(단, a는 $0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 상수이다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

▷ **깔끔한 문항. 그냥 차분하게.**
역함수 미분하기 전에 대응값부터.

[2009학년도 9월 11번]

88. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) $f(0)=0$
> (나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여
> $0<xf(y)<yf(x)$

세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_0^1 f(x)dx$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?88)

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$
④ $B<C<A$ ⑤ $C<A<B$

▷ (나)에서 기울기 모양을 잡아서 볼록성 확인.
준 식들을 [같은 차원]으로 가져가야겠는데..

[2009학년도 9월 28번]

89. 좌표평면에서 곡선 $y=\dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$과 직선 $y=\dfrac{2}{3}x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은?89)

① $\dfrac{5}{3}\ln2-\ln3$ ② $2\ln3-\dfrac{5}{3}\ln2$ ③ $\dfrac{5}{3}\ln2+\ln3$
④ $2\ln3+\dfrac{5}{3}\ln2$ ⑤ $\dfrac{7}{3}\ln2-\ln3$

▷ 적당한 개형. 대칭성(우기성)을 체크하면 조아.

1) ③
2) ④
3) 26
4) ③
5) 283
6) ③
7) ②
8) ①
9) 143
10) ①
11) ②
12) ①
13) ②
14) ⑤
15) ④
16) ①
17) 12
18) ②
19) ①
20) 242
21) ⑤
22) ②
23) ⑤
24) ③
25) ②
26) 93
27) ②
28) ⑤
29) 12
30) ②
31) ④
32) ①
33) ④
34) 2
35) ⑤
36) ②
37) ②
38) ⑤
39) ⑤
40) 16
41) 21
42) ①
43) ②
44) ②
45) 16
46) ⑤
47) ④
48) ③
49) ③
50) ④
51) 83
52) ④
53) 35
54) ①
55) 128
56) ②
57) 96
58) ①
59) 127
60) ③
61) ②
62) ①
63) 17
64) ①
65) 9
66) ③
67) ④
68) 50
69) ①
70) ⑤
71) ③
72) 24
73) ③
74) ④
75) ⑤
76) ④
77) ④
78) ③
79) ②
80) ④
81) 14
82) ⑤
83) 12
84) ②
85) ④
86) ②
87) ④

88) ④
89) ①