기출문제 다잡기

평가원의 수준

[수열의 극한]

5A ACADEMY
SOOHAN

[2023학년도 수능 미적분 25번]

1. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은?[1)]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

▷ 등비수열 $\{a_n\}$을 결정할 수 있다.

[2023학년도 9월 미적분 25번]

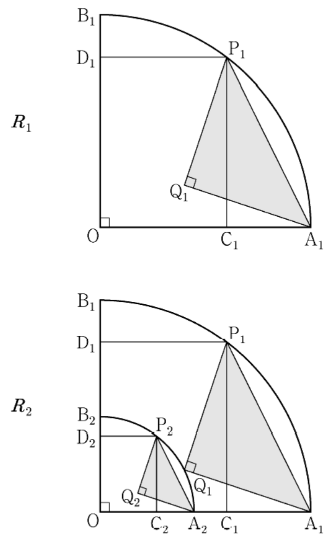
2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은?[2)]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ 무한대로 가는 것은?

[2023학년도 수능 미적분 27번]

3. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[3)]



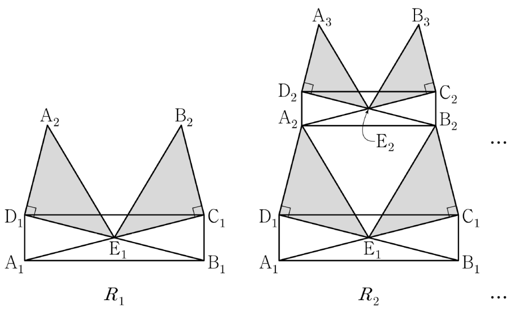
⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

▷ 좌표잡아도 좋고, 어떻게 보면 덧셈정리.

[2023학년도 9월 미적분 27번]

4. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2C_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?4)



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

▷ 덧셈정리도 반복해서 내는군.

[2023학년도 6월 미적분 23번]

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$의 값은?5)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

▷ 유리화

[2023학년도 6월 미적분 27번]

6. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은?6)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

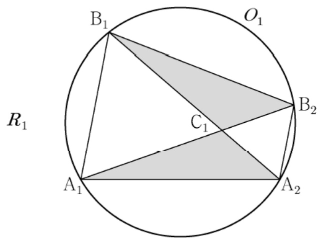
▷ 등차수열 $\{a_n\}$을 결정할 수 있다.

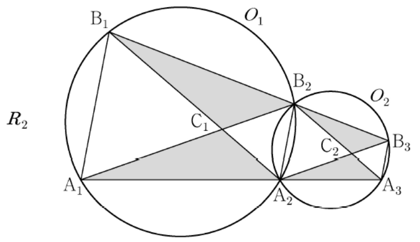
[2023학년도 6월 미적분 26번]

7. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다. 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자.

그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때 $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[7]





⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

▷ 원에 내접하는 사다리꼴.

[2022학년도 수능 미적분 25번]

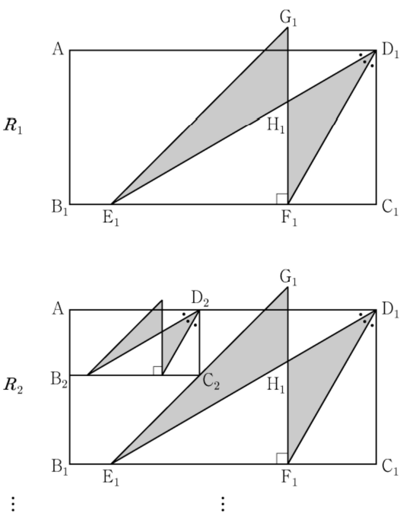
8. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?[8]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ 등비급수.

[2022학년도 9월 미적분 27번]

9. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?9)

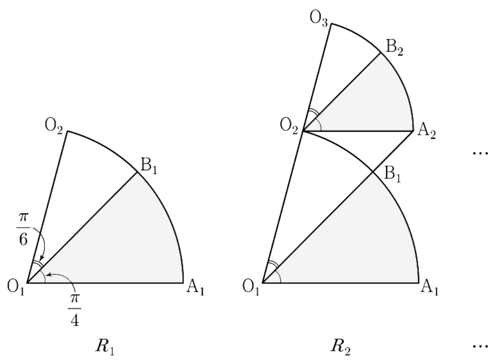


① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

▷ 귀찮은 문항. 답이 왜 간단하게 나오는지 모르겠네.

[2022학년도 6월 미적분 26번]

10. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?10)

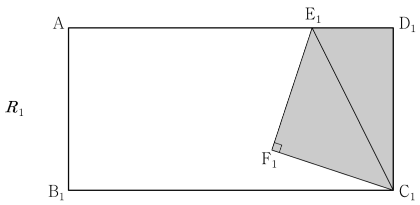


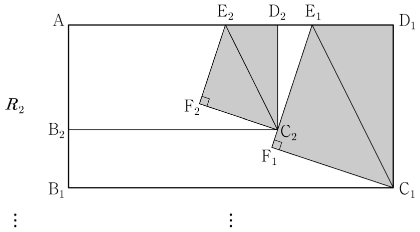
① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

▷ 등비급수와 도형에 삼각형분석이나 덧셈정리가 섞여 들어가고 있다. 전통으로 회귀하는 일은 없으려나.

[2021학년도 수능 14번]

11. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 선분 AD_1을 $3:1$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다. 사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 AE_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?11)





① $\frac{441}{103}$ ② $\frac{441}{109}$ ③ $\frac{441}{115}$
④ $\frac{441}{121}$ ⑤ $\frac{441}{127}$

▷ 여기다 덧셈정리를 냈어?

등비급수와 도형 문제는 전통적인 양식인
[직각삼각형 찾아서 피타고라스]
의 빈도가 꽤 줄어들었다.

[2021학년도 수능 18번]

12. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?12)

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

▷ 나눠서 함수 구하고 그래프 그리고 할 수 있지?

[수능 예시문항 미적분 24번]

13. 정수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n = \left(\frac{|k|}{3} - 2\right)^n$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수는?[13)]

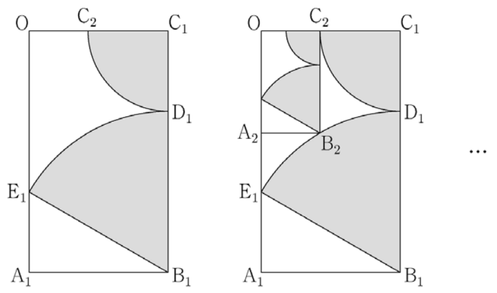
① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

▷ $-1 < r \le 1$이면 수렴한다.

참고로 등비급수는 ____________이면 수렴한다.

[수능 예시문항 미적분 26번]

14. 그림과 같이 $\overline{OA_1} = \sqrt{3}$, $\overline{OC_1} = 1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1} = 2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 ◁ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◁ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[14)]



R_1 R_2 …

① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$
④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

▷ 전통적인 양식인데, 조건을 좀 넘치게 줬다.
[어? 이게 왜 자동으로 나오지?]
하는 느낌으로 헷갈릴 수 있을 듯.

[2021학년도 9월 8번]

15. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} = 6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은?15)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ 공비는 딱봐도 ___.

[2021학년도 6월 5번]

16. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = 10$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 2a_n^2 + 3n^2}{a_n^2 + n^2}$의 값은?16)

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

▷ 급수가 수렴하면 ___________.

[2021학년도 6월 7번]

17. 함수

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \times \left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1} - 1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n} + 3}$$

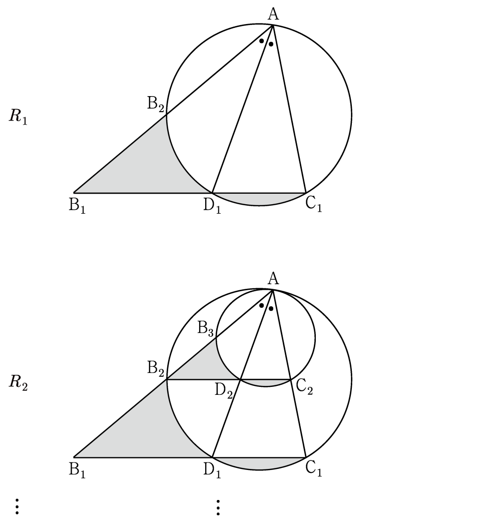
에 대하여 $f(k) = -\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는?17)

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

▷ $\frac{x}{4} = -1$일 때와 $\frac{x}{4} = 1$일 때를 기준으로.

[2021학년도 6월 20번]

18. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자. 세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?18)



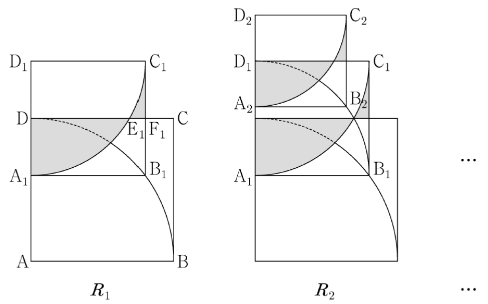
① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$
④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

▷ 등비급수와 도형을 [직각삼각형 찾기]가 아니라 [삼각형 분석]으로 출제할 수 있다는 것을 보여준 기념비적인 문항. 익숙하지 않아서 어렵기도 하고.

한편, [원과 비례] 때리면 쉬워져서 좀??

[2020학년도 수능(나형) 18번]

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD에 중심이 A이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 ABD를 그린다. 선분 AD를 3:2로 내분하는 점을 A_1, 점 A_1을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 BD와 만나는 점을 B_1이라 하자.
선분 A_1B_1을 한 변으로 하고 선분 DC와 만나도록 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 그린 후, 중심이 D_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $D_1A_1C_1$을 그린다. 선분 DC가 호 A_1C_1, 선분 B_1C_1과 만나는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 DA_1, DE_1과 호 A_1E_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 E_1F_1, F_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에 중심이 A_1이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 $A_1B_1D_1$을 그린다. 선분 A_1D_1을 3:2로 내분하는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 호 B_1D_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 A_2B_2를 한 변으로 하고 선분 D_1C_1과 만나도록 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린 후, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?19)



① $\frac{50}{3}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$ ② $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$
③ $\frac{50}{3}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$ ④ $\frac{100}{9}\left(3-\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$
⑤ $\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$

▷ 중요 포인트 두 가지.
① 중심과 연결, 직각삼각형의 피타고라스.
② 특수각 직각삼각형 찾기.

[2020학년도 수능(나형) 3번]

20. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}$ 의 값은?[20]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

▷ 유리화 한 번 해봐.

[2020학년도 9월(나형) 10번]

21. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sqrt{9n^2+4} < \sqrt{na_n} < 3n+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?[21]

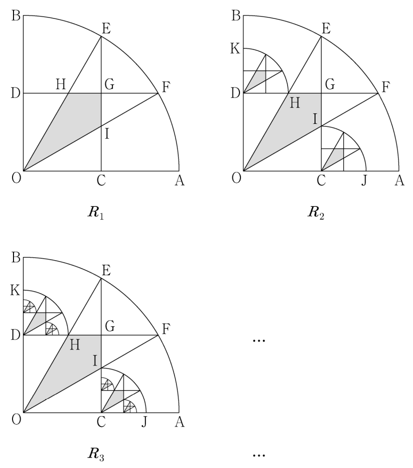
① 6 ② 7 ③ 8

④ 9 ⑤ 10

▷ 꼴 맞춰서 샌드위치.

[2020학년도 9월(나형) 18번]

22. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA의 중점을 C, 선분 OB의 중점을 D라 하자. 점 C를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 E, 점 D를 지나고 선분 OA와 평행한 직선이 호 AB와 만나는 점을 F라 하자.
선분 CE와 선분 DF가 만나는 점을 G, 선분 OE와 선분 DG가 만나는 점을 H, 선분 OF와 선분 CG가 만나는 점을 I라 하자. 사각형 OIGH를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 중심이 C, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CI}}$, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 CJI와 중심이 D, 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{DH}}$, 중심각의 크기가 90°인 부채꼴 DHK를 그린다.
두 부채꼴 CJI, DHK에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[22]



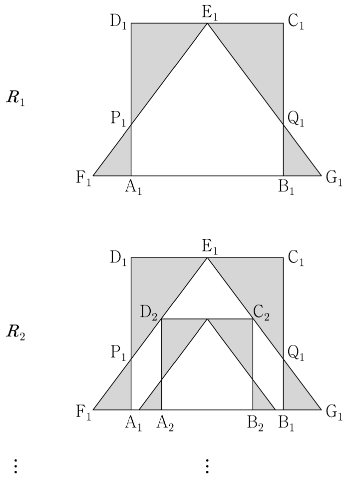
① $\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$ ② $\frac{7(3-\sqrt{3})}{15}$ ③ $\frac{8(3-\sqrt{3})}{15}$

④ $\frac{3(3-\sqrt{3})}{5}$ ⑤ $\frac{2(3-\sqrt{3})}{3}$

▷ 특수각 직각삼각형.

[2020학년도 6월(나형) 17번]

23. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 C_1D_1의 중점을 E_1이라 하고, 직선 A_1B_1 위에 두 점 F_1, G_1을 $\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$, $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이 되도록 잡고 이등변삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다. 선분 D_1A_1과 선분 E_1F_1의 교점을 P_1, 선분 B_1C_1과 선분 G_1E_1의 교점을 Q_1이라 할 때, 네 삼각형 $E_1D_1P_1$, $P_1F_1A_1$, $Q_1B_1G_1$, $E_1Q_1C_1$로 만들어진 ⩚ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 F_1G_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 G_1E_1 위의 점 C_2, 선분 E_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 ⩚ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?23)



① $\frac{61}{6}$ ② $\frac{125}{12}$ ③ $\frac{32}{3}$
④ $\frac{131}{12}$ ⑤ $\frac{67}{6}$

▷ 변의 길이 설정 & 닮음.
정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 a라 두는 과정이 중요하다.

[2020학년도 6월(나형) 11번]

24. 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-3)=2$를 만족시킨다.

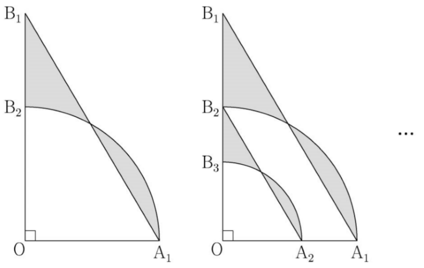
$\lim_{n\to\infty} a_n = r$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1}$의 값은?24)

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

▷ 수준 떨어지는 혼종.

[2019학년도 수능(나형) 16번]

25. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=4$, $\overline{OB_1}=4\sqrt{3}$인 직각삼각형 OA_1B_1이 있다. 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_1}$인 원이 선분 OB_1과 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 OA_1B_1의 내부와 부채꼴 OA_1B_2의 내부에서 공통된 부분을 제외한 ◺ 모양의 도형에 칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 OA_1과 만나는 점을 A_2, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OA_2}$인 원이 선분 OB_2와 만나는 점을 B_3이라 하자. 삼각형 OA_2B_2의 내부와 부채꼴 OA_2B_3의 내부에서 공통된 부분을 제외한 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[25)]



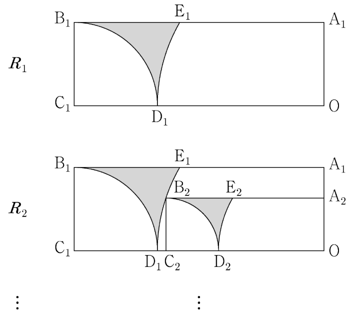
R_1 R_2 …

① $\frac{3}{2}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{6}\pi$
④ 2π ⑤ $\frac{13}{6}\pi$

▷ 부채꼴의 넓이를 구하려면 중심각이 필요하다.
문과 문젠데 어차피 특수각 아니면 답 없겠죠?

[2019학년도 9월(나형) 19번]

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=3$, $\overline{B_1C_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1C_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 D_1, 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\overline{OD_1}$인 원과 선분 A_1B_1의 교점을 E_1이라 하자. 직사각형 $OA_1B_1C_1$에 호 B_1D_1, 호 D_1E_1, 선분 B_1E_1로 둘러싸인 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 OA_1 위의 점 A_2와 호 D_1E_1 위의 점 B_2, 선분 OD_1 위의 점 C_2와 점 O를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=3:1$인 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[26)]



① $4-\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{7}{9}\pi$ ② $5-\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{35}{36}\pi$
③ $6-\sqrt{3}-\frac{7}{6}\pi$ ④ $7-\frac{7\sqrt{3}}{6}-\frac{49}{36}\pi$
⑤ $8-\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{14}{9}\pi$

▷ 전통 등비급수와 도형의 표준 문항이다.
중심과 연결, 직각삼각형의 피타고라스.

[2019학년도 9월 3번]

27. $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n+2^n}{4^n+3}$의 값은?27)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

▷ 분모분자를 [큰 것]으로 나눈다.

[2019학년도 6월(나형) 11번]

28. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?28)

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

▷ 등비수열의 수렴 조건 : ________

등비급수의 수렴 조건 : ________

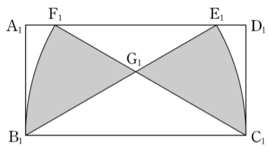
[2019학년도 6월(나형) 18번]

29. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자. 두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과 두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인 ⋈ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

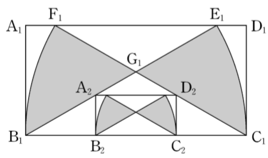
그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 ⋈ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?29)

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{3\sqrt{3}\pi-7}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}\pi-5}{9}$

④ $\frac{4\sqrt{3}\pi-10}{9}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}\pi-8}{9}$

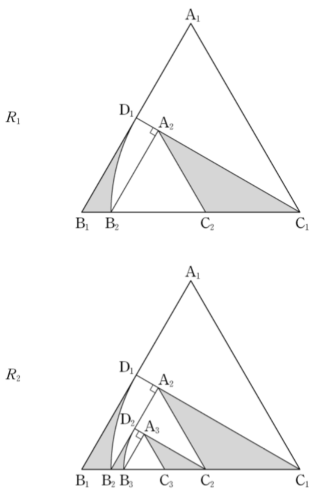
▷ 매번 하는 거

① 변의 길이 설정 & 닮음.

② 특수각 직각삼각형 찾기.

[2018학년도 수능(나형) 19번]

30. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?30)



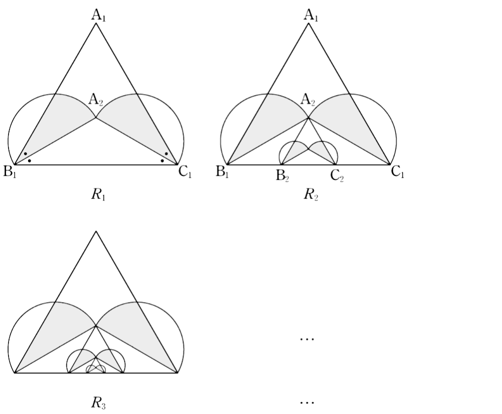
⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\frac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$
④ $\frac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

▷ 참 질리지도 않고 꾸준히 만드네요.

[2018학년도 6월(나형) 18번]

31. 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1C_1$의 이등분선과 $\angle A_1C_1B_1$의 이등분선이 만나는 점을 A_2라 하자. 두 선분 B_1A_2, C_1A_2를 각각 지름으로 하는 반원의 내부와 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 A_2를 지나고 선분 A_1B_1에 평행한 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 B_2, 점 A_2를 지나고 선분 A_1C_1에 평행한 직선이 B_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 그림 R_1에 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?31)

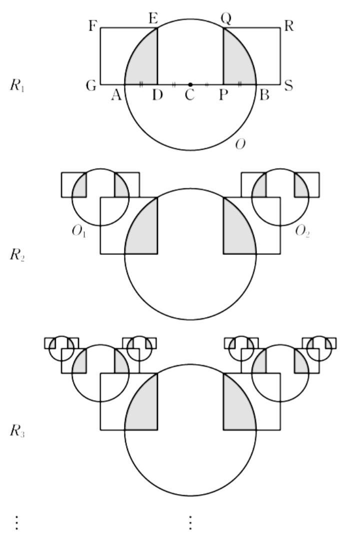


① $\frac{9\sqrt{3}+6\pi}{16}$ ② $\frac{3\sqrt{3}+4\pi}{8}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}+8\pi}{16}$
④ $\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}+6\pi}{8}$

▷ 뻔하다.

[2017학년도 수능(나형) 17번]

32. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라고 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 DEFG를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 PQRS를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 DEFG의 내부의 공통부분인 ⊿ 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 PQRS의 내부의 공통부분인 ◺ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DE}}$인 원 O_1, 점 R을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PQ}}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⊿ 모양의 2개의 도형과 ◺ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?32)

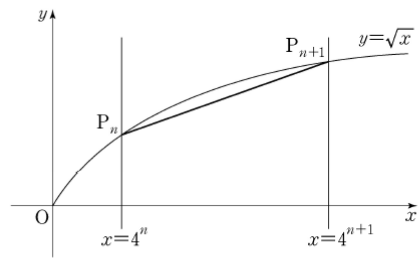


① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$
④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

▷ 이 느낌으로 특수각 숨기는 것도 패턴.

[2017학년도 수능(나형) 28번]

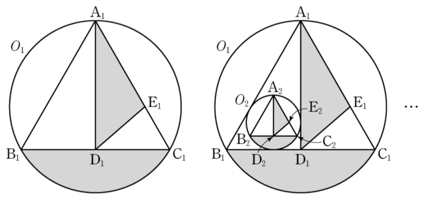
33. 자연수 n에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 P_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 L_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하여라.33)



▷ 실수가 많이 나오는 문항.
차분하게 다루면 별 것 아니다.

[2018학년도 9월(나형) 18번]

34. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$이 있다. 점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$을 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자. 점 $\mathrm{A_1}$을 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_1C_1}$과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_1D_1E_1}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 삼각형 $\mathrm{A_1B_1D_1}$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$를 그리고, 점 $\mathrm{A_2}$에서 선분 $\mathrm{B_2C_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{D_2}$, 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 $2:1$로 내분하는 점을 $\mathrm{E_2}$라 하자. 점 $\mathrm{A_2}$를 포함하지 않는 호 $\mathrm{B_2C_2}$와 선분 $\mathrm{B_2C_2}$로 둘러싸인 도형의 내부와 삼각형 $\mathrm{A_2D_2E_2}$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[34)]



R_1 R_2

① $\frac{16(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$ ② $\frac{16(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

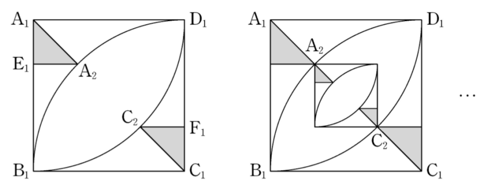
③ $\frac{32(3\sqrt{3}-2)\pi}{69}$ ④ $\frac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{69}$

⑤ $\frac{32(3\sqrt{3}-1)\pi}{65}$

▷ 내접원의 반지름의 길이 구할 때,
중심과 연결, 수직표시.

[2017학년도 9월(나형) 16번]

35. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 안에 꼭짓점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, $\mathrm{C_1D_1}$을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 $\mathrm{A_1C_1}$이 두 사분원과 만나는 점 중 점 $\mathrm{A_1}$과 가까운 점을 $\mathrm{A_2}$, 점 $\mathrm{C_1}$과 가까운 점을 $\mathrm{C_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_1D_1}$에 평행하고 점 $\mathrm{A_2}$를 지나는 직선이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{E_1}$, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 평행하고 점 $\mathrm{C_2}$를 지나는 직선이 선분 $\mathrm{C_1D_1}$과 만나는 점을 $\mathrm{F_1}$이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A_1E_1A_2}$와 삼각형 $\mathrm{C_1F_1C_2}$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[35)]



R_1 R_2

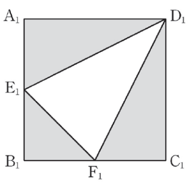
① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$ ② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$ ③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$

④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

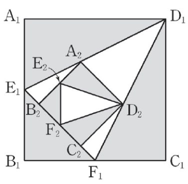
▷ 원은 중심과 연결.

[2017학년도 6월(나형) 17번]

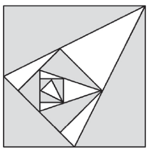
36. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2, 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?36)



R_1



R_2



…

① $\frac{125}{37}$ ② $\frac{125}{38}$ ③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$ ⑤ $\frac{125}{41}$

▷ 잘 안 보일 수 있다.
변의 길이 설정 & 닮음.

[2017학년도 6월(나형) 8번]

37. $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=10$일 때, 상수 a의 값은?37)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

▷ 참신하군.

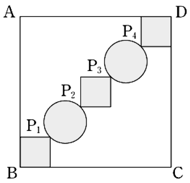
[2016학년도 수능 25번]

38. 첫째항이 1이고 공비가 $r(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{3}{4}$이다. r의 값을 구하여라.38)

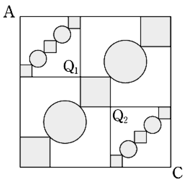
▷ 등비수열을 포함한 부정형.

[2016학년도 수능 15번]

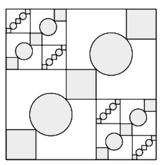
39. 그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$라 하고, 선분 $\mathrm{BP_1}$, $\mathrm{P_2P_3}$, $\mathrm{P_4D}$를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{P_1P_2}$, $\mathrm{P_2P_3}$를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{P_2P_3}$을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_1}$, 점 C와 가장 가까운 점을 $\mathrm{Q_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{AQ_1}$을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 선분 $\mathrm{AQ_1}$을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 $\mathrm{CQ_2}$를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?[39)]



R_1



R_2


R_3

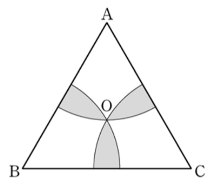
…

① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$
④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{27}{17}(2\pi+1)$

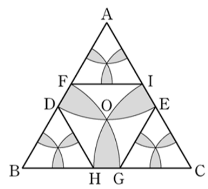
▷ [2017학년도]~[2020학년도]의
나형 문항들에 비하면 쉬워진다.

[2016학년도 9월 20번]

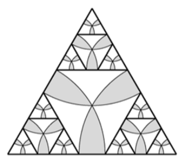
40. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AO}}$인 원을 O_{A}, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BO}}$인 원을 O_{B}, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CO}}$인 원을 O_{C}라 하자.
원 O_{A}와 원 O_{B}의 내부의 공통부분, 원 O_{A}와 원 O_{C}의 내부의 공통부분, 원 O_{B}와 원 O_{C}의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC 내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 원 O_{A}가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_{B}가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, O_{C}가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은?[40)]



R_1



R_2


R_3

…

① $(2\pi-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$ ② $(\pi-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$
③ $(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$ ④ $(\pi-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
⑤ $(2\pi-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$

▷ 숫자들이 귀찮다. 천천히 풀자.

[2016학년도 9월 24번]

41. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+2nx-4n=0$$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.41)

▷ 근의 공식.

[2016학년도 6월 8번]

42. 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$$

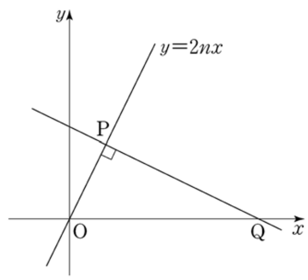
를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은?42)

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

▷ 평가원이 등비수열을 좋아하네.

[2016학년도 6월 10번]

43. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 OQ의 길이를 l_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}$의 값은?43) (단, O는 원점이다.)

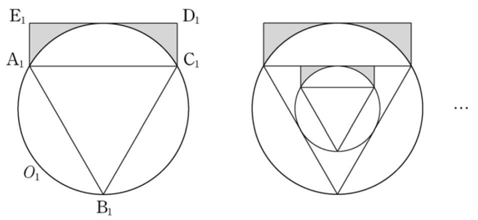


① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

▷ 아무렇게나.

[2016학년도 6월 15번]

44. 반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?44)



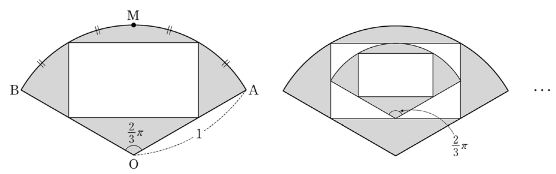
R_1 R_2 …

① $4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ② $4\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$
④ $5\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$ ⑤ $5\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

▷ 원은 중심에서부터 정의된 도형이다.
부채꼴이나 원이든 일단 중심을 찾는 것이 요령.

[2015학년도 9월 16번]

45. 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?45)



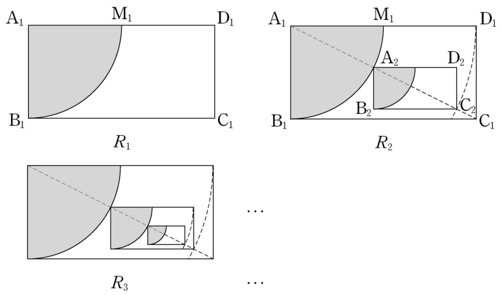
R_1 R_2 …

① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

▷ 중심에서 연결.

[2015학년도 6월 15번]

46. 그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하자. 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $A_1B_1M_1$을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$의 호 B_1M_1이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 A_2라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$인 원이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자. 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 A_1D_1과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?46)



① $\frac{5}{16}\pi$ ② $\frac{11}{32}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$
④ $\frac{13}{32}\pi$ ⑤ $\frac{7}{16}\pi$

▷ $\overline{A_2B_2}=a$라 두면, $\overline{A_2D_2}=2a$이다.
C_2가 원 위의 점이라는 사실을 써야 한다.

[2015학년도 수능 7번]

47. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은?47)

① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{83}{8}$ ③ $\frac{85}{8}$
④ $\frac{87}{8}$ ⑤ $\frac{89}{8}$

▷ 수열 $\{a_n^2\}$도 등비수열이얌.

[2015학년도 6월 25번]

48. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

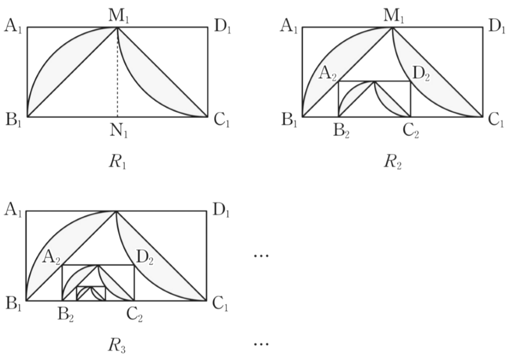
$$a_1+a_2=20, \quad \sum_{n=3}^{\infty}a_n=\frac{4}{3}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값을 구하여라.48)

▷ 등비급수 개 좋아하네.

[2014학년도 수능 15번]

49. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[49)]



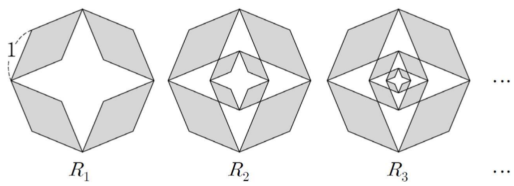
R_1 R_2 R_3

① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

▷ $\overline{A_2B_2}=a$라 두면, $\overline{B_1B_2}=$___, $\overline{A_2D_2}=$___이다.
D_2가 _______이라는 사실.

[2014학년도 9월 18번]

50. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[50)]



R_1 R_2 R_3 …

① $2+\sqrt{2}$ ② $1+2\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$
④ $1+3\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$

▷ 꽤 어렵다. 풀 필요 있나 싶기도 함.
이쯤부터 경향에서도 차이가 나기 시작하는데,
그 중에서도 이 문항은 유난히 특이하다.

잘 잘라서 닮음도형을 찾는 것이 보통이다.
풀이 루트에 따라서 이중근호가 뜰 수 있다.

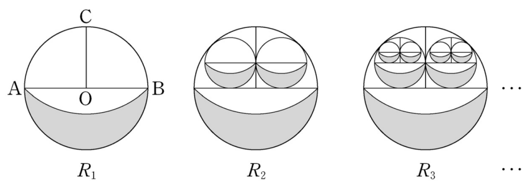
[2013학년도 수능 14번]

51. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 도형에 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[51]



① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$

④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

▷ 원이 접한다고? 중심에서 이어야지.

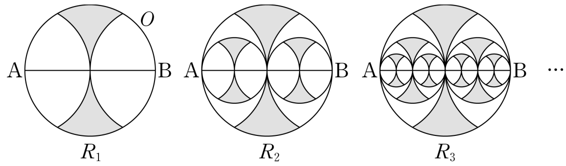
나왔을 때는 계산 좀 심하다 싶었는데,
요즘 문제들에 비하면 뭐..

[2013학년도 9월 9번]

52. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[52]



① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

▷ 얘는 그래도 첫째항 구하는 것까지만 귀찮겠군.

[2014학년도 9월 2번]

53. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$의 값은?[53)]

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

▷ $\sqrt{n^2+28n}\sim(n+14)$ 알아? 재미있는데.

[2013학년도 9월 28번]

54. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1},\quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.[54)]

▷ 합의 수열 S_n이 주어지면?

$\underline{\qquad\qquad} = a_n$

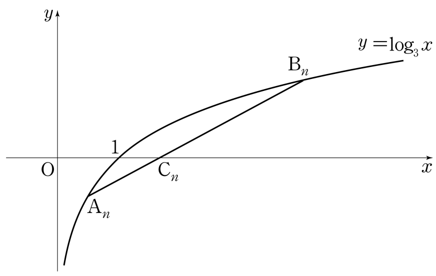
[2013학년도 9월 15번]

55. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1:2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은?[55)]

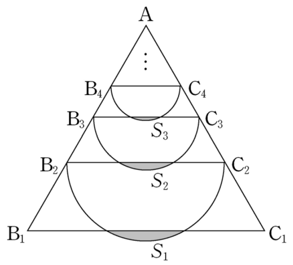
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1



▷ 수열의 극한이라기 보다는
지수로그함수의 그래프 문항이지만.

[2013학년도 6월 12번]

56. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2과 선분 AC_2을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3라 하고, 선분 B_3C_3를 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?56)



① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$
④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

▷ 중심에서 잇고, 대충 정삼각형 보이지?
특히 시험 때는 엄밀하게 가지 마. 휴리스틱.

[2013학년도 6월 18번]

57. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값은?57)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

▷ n이 짝수일 때와 홀수일 때.

[2012학년도 9월 25번]

58. 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

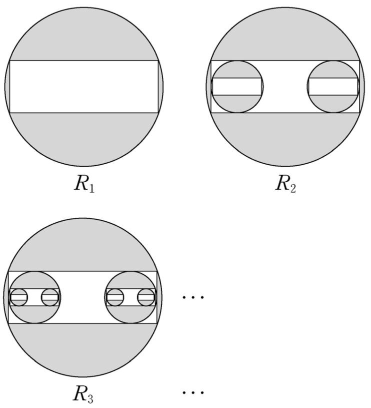
$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = 2, \quad \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n = 7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.58)
(단, $a_n \neq 0$)

▷ 틀리면 대박.

[2012학년도 수능 14번]

59. 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3:1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?59)



① $\frac{5}{4}\pi-\frac{5}{3}$ ② $\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{5}$
④ $\frac{5}{4}\pi-1$ ⑤ $\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{15}$

▷ 지름 하나 잡고, $1:3$인 것과 피타고라스.

[2012학년도 9월 28번]

60. 첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음 규칙에 따라 정한다.

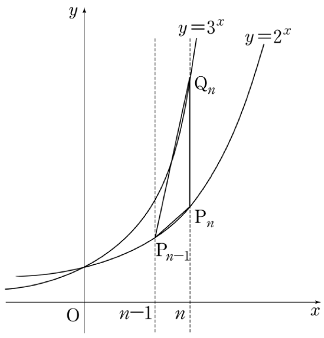
> (가) $b_1=1$
> (나) $n\ge 1$일 때, b_{n+1}은 점 $\mathrm{P}_n(-b_n,\ b_n^2)$을 지나고 기울기가 a_n인 직선과 곡선 $y=x^2$의 교점 중에서 P_n이 아닌 점의 x좌표이다.

$\lim_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하여라.60)

▷ 점화식 풀이가 필요한데, 요정도는 하자.
조건을 식으로 나타내면 $b_{n+1}-b_n=$_____다.
$n=1,\ n=2,\ \cdots,\ n=n$ 넣고 변변 더하기.

[2012학년도 6월 20번]

61. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nP_{n-1}$의 넓이를 S_n이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n} S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$의 값은?61) (단, 점 P_0의 좌표는 $(0, 1)$이다.)

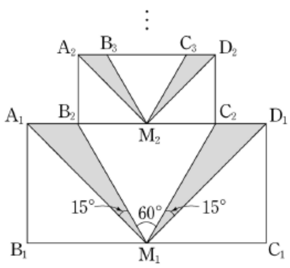


① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

▷ 밑변을 P_nQ_n으로 두면, 높이는 뭐?

[2012학년도 수능 10번]

62. $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하고, 선분 A_1D_1 위에 $\angle A_1M_1B_2=\angle C_2M_1D_1=15^\circ$, $\angle B_2M_1C_2=60^\circ$가 되도록 두 점 B_2, C_2를 정한다. 삼각형 $A_1M_1B_2$의 넓이와 삼각형 $C_2M_1D_1$의 넓이의 합을 S_1이라 하자. 사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 $\overline{B_2C_2}=2\overline{A_2B_2}$인 직사각형이 되도록 그림과 같이 두 점 A_2, D_2를 정한다.
선분 B_2C_2의 중점을 M_2라 하고, 선분 A_2D_2 위에 $\angle A_2M_2B_3=\angle C_3M_2D_2=15^\circ$, $\angle B_3M_2C_3=60^\circ$가 되도록 두 점 B_3, C_3을 정한다. 삼각형 $A_2M_2B_3$의 넓이와 삼각형 $C_3M_2D_2$의 넓이의 합을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?62)



① $\frac{2+\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{4+\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{5-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{7-\sqrt{3}}{8}$

▷ 와 쉽당.

[2011학년도 수능 25번]

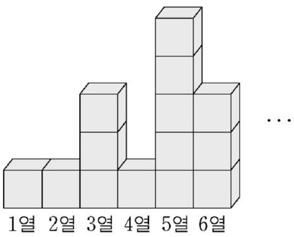
63. 자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자. 예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하여라.63) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

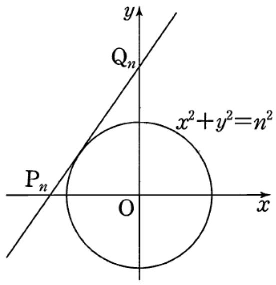


▷ 매우 어렵다. 넣을까 말까 고민했어.
요즘 스따일이 아니기도 하고.

힌트는, $f(2)$, $f(4)$, $f(8)$, $f(16)$, $\cdots$만
조사하라는 것. 일단 나열해보고..?

[2011학년도 9월 9번]

64. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은?64)

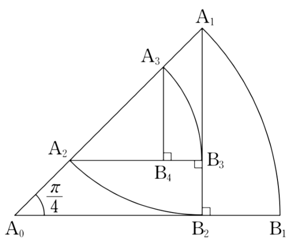


① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{5}{8}$

▷ [중심에서 직선까지가 반지름]으로 풀어도
좋고, 원점과 접점 연결해서 닮음 때려도 좋고.

[2011학년도 9월 12번]

65. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1 위의 $\overline{A_1B_2}=\overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2 위의 $\overline{A_2B_3}=\overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다. 이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}B_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$위의 $\overline{A_nB_{n+1}}=\overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다. 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[65]



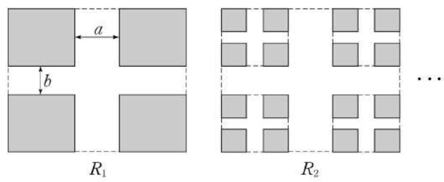
① $(4-\sqrt{2})\pi$ ② $(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$ ⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

▷ 왔다갔다 해서 좀 헷갈리는 것이 난이도.

[2011학년도 6월 10번]

66. 가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자. R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 ✚ 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자.

직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[66]



① 26 ② 30 ③ 34
④ 38 ⑤ 42

▷ 어디를 잘라 내도 상관없다.

[2011학년도 6월 21번]

67. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n a_n - 2)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n + 5\cdot 4^{-n}}{a_n + 3^{-n}}$의 값을 구하여라.67)

▷ 수열 $\{3^n a_n\}$이 ____로 수렴한다.
구하는 극한에서 $3^n a_n$이 나오도록 변형.

[2010학년도 9월 13번]

68. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?68) (단, $a_1 > 0$)

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 수렴한다.

ㄴ. 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$이 수렴한다.

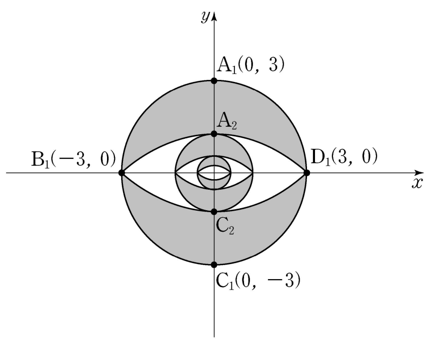
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}\right)$이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

▷ 부분합의 극한. 수열 $\{a_n\}$의 일반항에서부터.

[2010학년도 수능 15번]

69. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $\mathrm{A_1}(0,\ 3)$, $\mathrm{B_1}(-3,\ 0)$, $\mathrm{C_1}(0,\ -3)$, $\mathrm{D_1}(3,\ 0)$이라 하자.
두 점 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{D_1}$을 모두 지나고 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{C_1}$을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{C_2}$, $\mathrm{A_2}$라 하자.
호 $\mathrm{B_1A_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_1A_2D_1}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $\mathrm{B_1C_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_1C_2D_1}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.
선분 $\mathrm{A_2C_2}$를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{D_2}$라 하자.
두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{D_2}$를 모두 지나고 두 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{C_2}$를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 $\mathrm{C_3}$, $\mathrm{A_3}$이라 하자.
호 $\mathrm{B_2A_2D_2}$와 호 $\mathrm{B_2A_3D_2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $\mathrm{B_2C_2D_2}$와 호 $\mathrm{B_2C_3D_2}$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$과 호 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n + T_n)$의 값은?69)

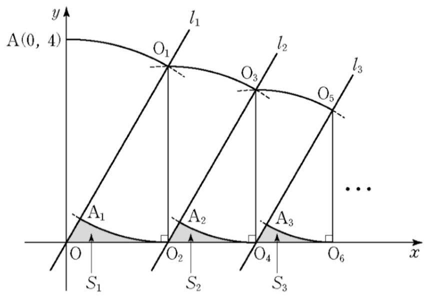


① $6(\sqrt{2}+1)$ ② $6(\sqrt{3}+1)$ ③ $6(\sqrt{5}+1)$
④ $9(\sqrt{2}+1)$ ⑤ $9(\sqrt{3}+1)$

▷ 부채꼴의 중심 찾을 생각 못해서
헤매는 학생이 나올 듯. 계산 좀 짜증.

[2010학년도 9월 9번]

70. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선 l_1과 점 A(0, 4)가 있다.
점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_2을 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 A_1O, 선분 OO_2, 호 O_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.
점 O_2를 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 O_3O_4를 반지름으로 하는 원이 선분 O_2O_3과 만나는 점을 A_2이라 하자. 선분 A_2O_2, 선분 O_2O_4, 호 O_4A_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?70)



① $4\sqrt{3}-2\pi$ ② $8\sqrt{3}-4\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\pi$
④ $8\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

▷ 무난.

[2010학년도 수능 23번]

71. 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_2=\frac{1}{2}$, $a_5=\frac{1}{6}$을 만족시킨다.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} a_{n+2} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.71)
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

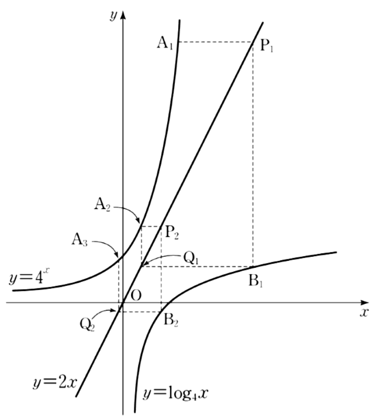
▷ 수열 $\{a_n a_{n+1} a_{n+2}\}$도 등비수열이당.

[2010학년도 9월 17번]

72. 자연수 n에 대하여 점 A_n이 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(a,\ 4^a)$이다.
> (나) (1) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 P_n이라 한다.
> (2) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
> (3) 점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 Q_n이라 한다.
> (4) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은?72)



① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{11}{16}$ ③ $-\frac{5}{8}$
④ $-\frac{9}{16}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

▷ 수열 $\{x_n\}$이 만족시키는 점화식을 구한다.

[2010학년도 6월 23번]

73. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하여라.73)

▷ (불연속)×(연속)이 연속이려면?

[2009학년도 수능 6번]

74. 함수

$$f(x)=x^2-4x+a$$

와 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$$

에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?74)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

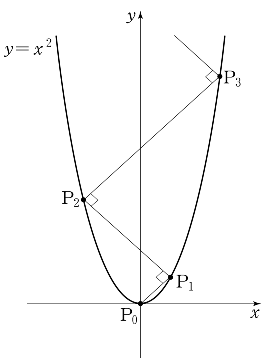
▷ a가 변할 때 $f(x)$는 위아래로 움직이고, b가 변할 때 $g(x)$는 좌우로 움직인다.

[2009학년도 수능 13번]

75. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$이다. (나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $P_{n-1}P_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다. (단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{P_{n-1}P_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은?75)

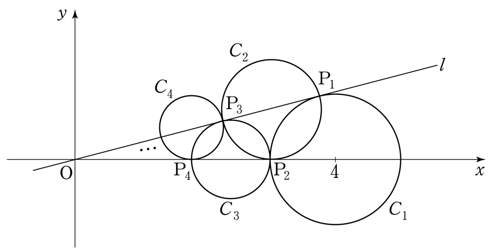


① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

▷ 몇 개 구하다 보면 규칙 보인다.

[2009학년도 수능 14번]

76. 좌표평면에 원 $C_1:(x-4)^2+y^2=1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자. 중심이 직선 l 위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.
중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.
중심이 직선 l 위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.
이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?76) (단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)



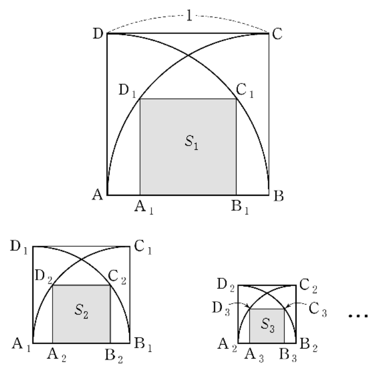
① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

▷ 엄밀하게 따지기가 꽤 어렵다.
그냥 보이는 대로 풀어라.

답 내는 것도 아주 쉽지는 않다.

[2009학년도 9월 17번]

77. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이라 하자.
정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 안에 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$을 각각 중심으로 하고 변 $\mathrm{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?77)



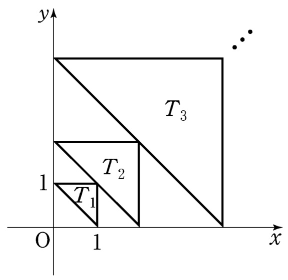
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{23}{16}$

▷ 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 한 변의 길이를 a라 두고.
$\mathrm{C_1}$ 또는 $\mathrm{D_1}$이 원 위의 점이라는 사실을 써야 돼.

[2009학년도 9월 24번]

78. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}_n(x_n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(0,\ x_n)$, $\mathrm{C}_n(x_n,\ x_n)$을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 T_n을 다음 조건에 따라 그린다.

(가) $x_1=1$이다.
(나) 변 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$의 중점이 C_n이다.
　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



삼각형 T_n의 넓이를 a_n, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n b_n}{a_n+2^n}$의 값을 구하여라.78)

▷ 대충 풀면 되죵.

[2009학년도 6월 19번]

79. 자연수 a, b에 대하여 함수

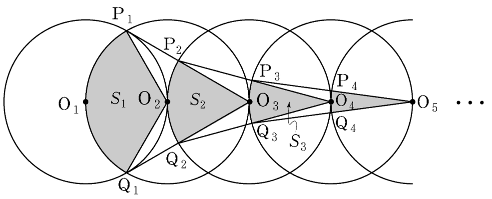
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+b}+2x-1}{x^n+1}\ (x>0)$$

이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+10b$의 값을 구하여라.79)

▷ 기본 문항.

[2008학년도 6월 15번]

80. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O_1, O_2, O_3, $\cdots$인 원들이 있다. 모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.
두 원 O_1, O_2가 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$의 넓이를 S_1이라 하자.
두 점 P_1, Q_1에서 원 O_3의 중심과 연결한 선분이 원 O_3과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_3\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$의 넓이를 S_2라 하자.
두 점 P_2, Q_2에서 원 O_4의 중심과 연결한 선분이 원 O_4와 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 부채꼴 $\mathrm{O}_4\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3$의 넓이를 S_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?80)

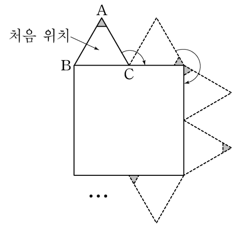


① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{5}{6}\pi$
④ π　⑤ $\frac{7}{6}\pi$

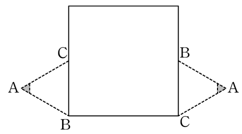
▷ 닮음이 아니라서 특이한 유형.
어차피 등비수열이겠지만.
중심각들을 째려보자. 딱 봐도.

[2008학년도 6월 17번]

81. 한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자.
예를 들어 $n=1$일 때, [그림2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?81)



[그림1]



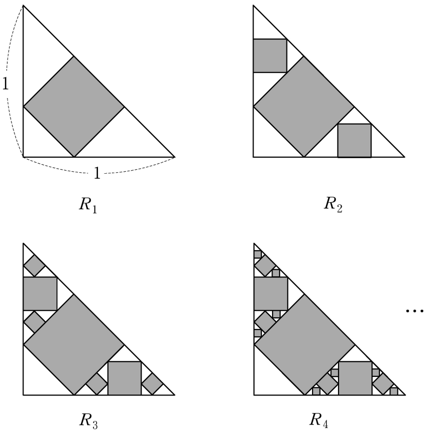
[그림2]

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

▷ 요즘 수능과는 괴리가 느껴진다.
충~분히 관찰해 보자. $\{a_n\}$ 보다 $\{a_{3n-2}\}$이 쉽다.

[2007학년도 수능 17번]

82. 아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변 삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?82)

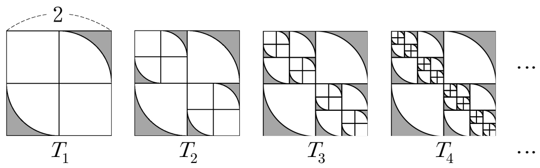


① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$　② $\frac{\sqrt{2}}{5}$　③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{2}{5}$

▷ [정사각형 한 변의 길이를 a라 하자.]가 풀이의 중요한 과정이다.

[2007학년도 9월 14번]

83. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 1인 사분원 2개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_1이라 하자.
T_1에서 한 변의 길이가 1인 정사각형 2개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 사분원 4개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_2라 하자.
T_2에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 4개를 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 나누고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 사분원 8개의 외부(어두운 부분)를 잘라낸 후 남은 도형을 T_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형을 T_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?83)

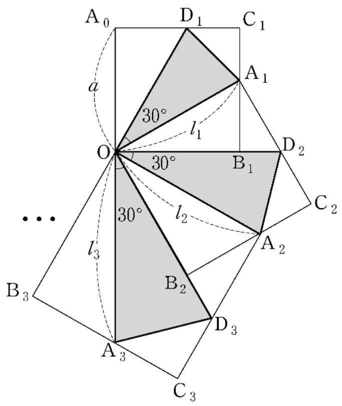


① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{2}{3}\pi$　③ $\frac{3}{4}\pi$
④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

▷ 어느 쪽을 구하는 것인지 헷갈린다.
T_1에서 오른쪽 위와 왼쪽 아래는 조작이 끝났고 왼쪽 위와 오른쪽 아래는 더 건드리게 된다.

[2007학년도 6월 16번]

84. 그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $OB_1C_1A_0$이 있다. 삼각형 OA_1D_1이 $\angle D_1OA_1 = 30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_1C_1, A_0C_1 위에 각각 점 A_1, D_1을 잡고 변 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.
선분 OA_1을 한 변으로 하는 정사각형 $OB_2C_2A_1$에서 삼각형 OA_2D_2가 $\angle D_2OA_2 = 30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_2C_2, A_1C_2 위에 각각 점 A_2, D_2를 잡고 변 OA_2의 길이를 l_2라 하자.
선분 OA_2를 한 변으로 하는 정사각형 $OB_3C_3A_2$에서 삼각형 OA_3D_3이 $\angle D_3OA_3 = 30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_3C_3, A_2C_3 위에 각각 점 A_3, D_3을 잡고 변 OA_3의 길이를 l_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 OA_nD_n에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} = \sqrt{3}$일 때, a의 값은?84)



① $\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{3}$

▷ 약간 헷갈리는군.
넓이는 $\frac{1}{2}ab\sin\theta$ 치는 것이 보통.

[2007학년도 6월 21번]

85. 두 함수 $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x^{2n+2}+1}{x^{2n}+2}$, $g(x) = \sin(k\pi x)$에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$가 실근을 갖지 않을 때, $60k$의 최댓값을 구하여라.85)

▷ $y = f(x)$ 잘 그리면 끝.

[2006학년도 수능 13번]

86. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{(n-1)\pi}{2}, \quad b_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}$$

일 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?86)

<보 기>

ㄱ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{3k} < 0$이다.

ㄴ. 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k-1} + b_{4k-1} = 0$이다.

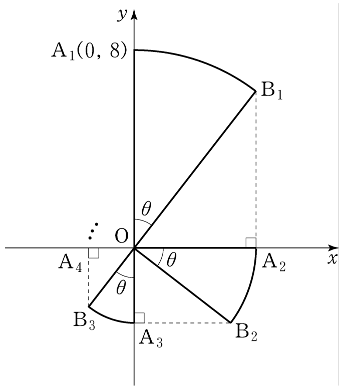
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{3}{5}\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

▷ 항들을 충분히 나열해 보자. 아주 충분히.

[2006학년도 수능 15번]

87. 그림과 같이 원점 O와 점 $A_1(0, 8)$을 이은 선분 OA_1을 반지름으로 하고, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_1B_1을 그린다.
점 B_1에서 x축에 내린 수선의 발을 A_2라 하고, 반지름이 선분 OA_2이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다.
점 B_2에서 y축에 내린 수선의 발을 A_3이라 하고, 반지름이 선분 OA_3이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OA_3B_3을 그린다.
이와 같이 시계 방향으로 x축과 y축에 번갈아 수선의 발을 내리는 과정을 계속하여 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = 12\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은?87)
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.)



① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

▷ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$배가 되는군.

[2006학년도 9월 9번]

88. 순환소수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 각 항이

$$a_1 = 0.\dot{1}$$
$$a_2 = 0.\dot{1}\dot{0}$$
$$a_3 = 0.\dot{1}0\dot{0}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0.\dot{1}\underbrace{00\cdots 0\dot{0}}_{0\text{은 } (n-1)\text{개}}$$
$$\vdots$$

일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$의 값은?88)

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

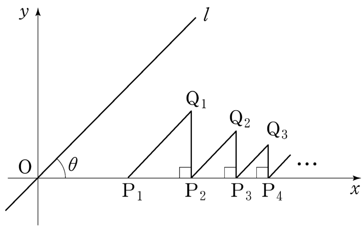
▷ 와, 진짜 옛날 문제.

$a_1 = \frac{1}{9}$, $a_2 = \frac{10}{99}$, $a_2 = \frac{100}{999}$, $\cdots$

이다. 다음부터 풀어봐.

[2006학년도 9월 17번]

89. 그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다.
점 $P_1(1, 0)$을 지나고 직선 l과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{OP_1}=\overline{P_1Q_1}$이 되는 점 Q_1을 선택하자.
점 Q_1에서 x축에 내린 수선의 발을 P_2라 하고,
점 P_2를 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2Q_2}$가 되는 점 Q_2를 선택하자.
점 Q_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3이라 하고,
점 P_3을 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_2P_3}=\overline{P_3Q_3}$이 되는 점 Q_3을 선택하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점 P_n, Q_n에 대하여 선분 P_nQ_n의 길이를 a_n이라 하자.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은?89) (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

▷ $\cos\theta$배가 되겠군.

[2006학년도 6월 9번]

90. 다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$로부터 얻을 수 있는 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$에 대하여, 보기에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?90) (단, 모든 자연수 n에 대하여 $f'(n)\neq 0$이다.)

<보 기>

ㄱ. $f(x)=2x^3+3x^2+1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}=\frac{1}{6}$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$이 수렴하면 $x\to\infty$일 때 $f'(x)$는 발산한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

▷ 니은은 눈에 띄는 반례.
디귿이 그래도 의미 있네.

[2006학년도 6월 10번]

91. 두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $g(x)=-x(x^2-a^2)$에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 갖는 a의 최댓값은?91)

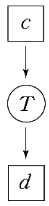
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

▷ 그래프 잘 그리면 된당.

[2005학년도 수능 23번]

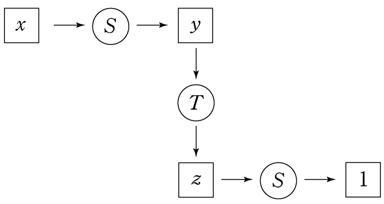
92. 실수 $a(a>1)$에 대하여 $b=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}$을 [그림1]과 같이 나타내고, 실수 c에 대하여 $d=16^{c}$을 [그림2]와 같이 나타내기로 한다.

[그림1]



[그림2]

아래 그림의 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{xz}{y}$의 값을 구하여라.92)



▷ 시키는 대로.

[2005학년도 9월 20번]

93. 다음 등식을 만족하는 소수 p는 2개 존재한다.

$$\frac{1}{p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}}+\frac{b}{6^{2n}}\right)=\frac{a}{6}+\frac{b}{6^{2}}+\frac{a}{6^{3}}+\frac{b}{6^{4}}+\cdots$$

(단, $0\leq a<6$, $0\leq b<6$, a와 b는 정수이다.)

위 등식을 만족하는 두 소수의 합을 구하여라.93)

▷ 일단 등비급수부터 계산.
다음은, p가 소수이므로..

[2005학년도 6월 3번]

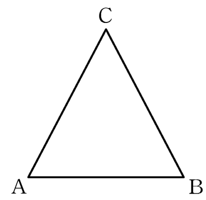
94. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$의 값은?[94)]

① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{2}+1$

▷ 유리화 하는 새끼들 있겠지?

[2005학년도 6월 16번]

95. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 양수 r에 대하여 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.



(가) 점 P_1은 꼭짓점 A이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n에서 정삼각형 ABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 r^n만큼 이동한 점이다.

집합 S를 $S=\{\mathrm{P}_n \mid n$은 자연수$\}$라 할 때, 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[95)]

<보 기>

ㄱ. $r=2$이면, 점 P_3은 꼭짓점 C이다.
ㄴ. $r=\frac{4}{5}$이면, 변 CA 위에 S의 원소가 무수히 많다.
ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$이면, 변 AB 위에 S의 원소가 무수히 많다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

▷ 급수의 수렴값에 해당하는 만큼 갔을 때의 직전에 다다다다다다닥 계속 찍는다. 계속.

1) ⑤
2) ⑤
3) ②
4) ③
5) ①
6) ③
7) ②
8) ②
9) ③
10) ③
11) ③
12) ③
13) ③
14) ⑤
15) ③
16) ①
17) ②
18) ①
19) ⑤
20) ③
21) ④
22) ①
23) ②
24) ③
25) ④
26) ②
27) ③
28) ⑤
29) ②
30) ②
31) ①
32) ③
33) 16
34) ③
35) ③
36) ⑤
37) ⑤
38) 4
39) ②
40) ③
41) 2
42) ②
43) ④
44) ①
45) ④
46) ①
47) ①
48) 16
49) ③
50) ①
51) ③
52) ②
53) ②
54) 12
55) ①
56) ②
57) ①
58) 35
59) ②
60) 19
61) ③
62) ②
63) 19
64) ④
65) ②
66) ②
67) 4
68) ⑤
69) ④
70) ②
71) 19
72) ⑤
73) 90
74) ③
75) ②
76) ③
77) ②
78) 12
79) 21
80) ②
81) ①
82) ⑤
83) ④
84) ③
85) 10
86) ⑤
87) ⑤
88) ②

89) ④
90) ④
91) ②
92) 40
93) 12
94) ①
95) ②