원포인트 개념주입 B2

통계

✏ 확률변수 X가 가질 수 있는 값이 $x_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이고 $\mathrm{P}(X=x_i)=p_i$이면,

① $\mathrm{P}(x_a \le X \le x_b)=\sum_{i=a}^{b} p_i$

② 평균(기댓값) : $\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

③ 분산 : $\mathrm{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i\ \ (m=\mathrm{E}(X))$

개념1

001.

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3-a}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3+a}{8}$	$\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\frac{7}{8}$일 때, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?1)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

002.

두 이산확률변수 X와 Y가 가지는 값이 각각 1부터 5까지의 자연수이고

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=4$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은?2)

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ $\frac{13}{2}$

개념2

✏ 확률변수 X에 대하여 아래의 등식이 성립한다.

① $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$, $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$, $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

② $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

③ $\mathrm{E}(aX^2+bX+c)=a\mathrm{E}(X^2)+b\mathrm{E}(X)+c$

003.

각 면에 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자를 던져서 윗면에 적혀 있는 확률변수 X라 할 때, 확률변수 $9X+4$의 기댓값을 구하여라.3)

004.

이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{ax+2}{10}\ (x=-1,\ 0,\ 1,\ 2)$$

일 때, 확률변수 $3X+2$의 분산 $\mathrm{V}(3X+2)$의 값은?4)
(단, a는 상수이다.)

① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

005.

확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=5$일 때, $\mathrm{E}((X-1)^2)$의 값은?5)

① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

개념3

✏ 일어날 확률이 p인 시행을 n번 반복할 때 X번 일어난다. : $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$

$\Rightarrow$ $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$이면 $\mathrm{P}(X=k) = {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$

006.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르를 때, $\mathrm{P}(X \geq 3)$의 값은?6)

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{9}$

④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{11}$

007.

10개의 문항이 출제되는 어떤 시험에서 A가 각각의 문제의 정답을 고를 확률은 다음을 만족시킨다.

> 문제의 정답을 A가 알고 있을 확률은 $\frac{1}{2}$이고, A는 정답을 아는 모든 문제는 정답을 고른다. A가 모르는 문제의 정답을 고를 확률은 $\frac{1}{5}$이다.

이때 A가 정답을 고르는 문제의 수를 확률변수 X라 하자. $\frac{\mathrm{P}(X=8)}{\mathrm{P}(X=9)}$의 값은?7)

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

개념4

✏ $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$이면 $\mathrm{E}(X) = np$, $\mathrm{V}(X) = npq$

008.

주사위 2개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복할 때, 두 주사위의 눈의 수의 곱이 홀수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(4X-1)$의 값은?[8)]

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

009.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(9,\ p)$를 따르고 $\{\mathrm{E}(X)\}^2 = \mathrm{V}(X)$일 때, p의 값은?[9)] (단, $0 < p < 1$)

① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{11}$
④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

010.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ p)$를 따르고 $\mathrm{P}(X=4) = \frac{1}{3}\mathrm{P}(X=5)$일 때, $\mathrm{E}(7X)$의 값을 구하여라.[10)] (단, $0 < p < 1$)

011.

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x) = {}_{20}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \quad (x = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$$

일 때, $\sum_{k=0}^{20} x^2\mathrm{P}(X=x)$의 값을 구하여라.[11)]

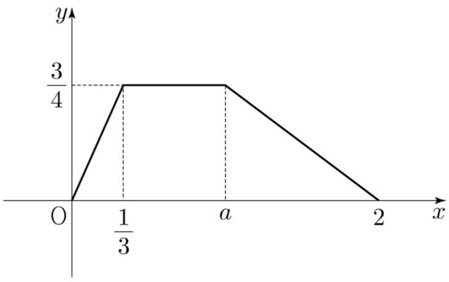
개념5

✏ 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$이다. $\Leftrightarrow$ $X \sim f(x)$

$\Rightarrow$ $X \sim f(x)$이면 $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

012.

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le a\right)$의 값은?12) (단, a는 상수이다.)



① $\frac{11}{16}$　② $\frac{5}{8}$　③ $\frac{9}{16}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{7}{16}$

013.

닫힌구간 $[0, 3]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} 2a(1-x) & (0 \le x < 1) \\ a(x-1) & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

$\mathrm{P}(0 \le X \le 2) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.13)
(단, a는 양의 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

개념6

✏ 정규분포의 확률 : 알아서

014.

어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양은 평균이 30.2mg, 표준편차가 0.6mg인 정규분포를 따른다고 한다. 어느 날 이 연구원이 하루 동안 추출한 호르몬의 양이 29.6mg 이상이고 31.4mg 이하일 확률을 다음 표준정규분포를 이용하여 구한 것은?14)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6247
④ 0.7745 ⑤ 0.8185

015.

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고 다음 등식을 만족시킨다.

$$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) - \mathrm{P}(X \le m-12) = 0.3664$$

아래의 표준정규분포표를 이용하여 σ의 값을 구한 것은?15)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

개념7

✏ 정규분포의 표준화 : 알아서

016.

A공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 120g, 표준편차가 20g인 정규분포를 따르고, B공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균이 110g, 표준편차가 24g인 정규분포를 따른다고 한다. A공장에서 임의로 선택한 제품의 무게가 110g 이하일 확률과 B공장에서 임의로 선택한 제품의 무게가 ag 이하일 확률이 같을 때, a의 값은?16)

① 94 ② 95 ③ 96
④ 97 ⑤ 98

017.

A과수원에서 생산되는 사과의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고, B과수원에서 생산되는 사과의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 20^2)$을 따른다고 한다. A, B 두 과수원에서 임의로 각각 사과를 1개씩 선택할 때, A과수원에서 선택된 사과의 무게가 80g 이상일 확률과 B과수원에서 선택된 사과의 무게가 80g 이하일 확률이 같다. m의 값은?17)

① 58 ② 60 ③ 62
④ 64 ⑤ 66

✏ 정규분포의 확률밀도함수 :
① 대칭성
② 개형

개념8

018.

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$의 값을 다음 정규분포표를 이용하여 구한 것은?18)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062
④ 0.078 ⑤ 0.097

019.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따르고, 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$와 $g(x)$이다.

$f(12) = g(26)$, $\mathrm{P}(Y \ge 26) \ge 0.5$

일 때, $\mathrm{P}(Y \le 20)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?19)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0896
④ 0.1587 ⑤ 0.2255

개념9

✏ $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$에서 n이 충분히 크면 $X \sim \mathrm{N}(np,\ npq)$로 근사시킬 수 있다.

020.

어느 학교 학생들 중 40%가 학교 식당에서 평일 저녁 식사를 한다. 이 학교 학생들 중 임의로 150명을 택하여 학교 식당에서 평일 저녁 식사를 하는지를 조사할 때, 학교 식당에서 평일 저녁 식사를 하는 학생이 54명 이상 69명 이하일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[20]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6826 ③ 0.7745
④ 0.8668 ⑤ 0.9104

021.

$\displaystyle\sum_{k=100}^{130} {}_{720}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{720-k}$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[21]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.6826 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8351 ⑤ 0.9270

✏ 표본들이 가진 값들의 평균을 표본평균이라 한다.
$\Rightarrow$ 비복원은 안 나오니까 다 복원추출이라 치자.
✏ 모집단(모확률변수)의 평균이 $m(\mathrm{E}(X))$, 분산이 $\sigma^2(\mathrm{V}(X))$일 때,
크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$의 평균은 $m(\mathrm{E}(X))$, 분산은 $\frac{\sigma^2}{n}(\frac{\mathrm{V}(X)}{n})$이다.

개념10

022.

모집단의 확률변수 X의 확률분포가 아래의 표와 같다. 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 임의추출할 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}(\overline{X}=2)$를 구하여라.22)

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{4}$	1

023.

다음은 어느 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 나타낸 표이다.

X	1	4	7	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}-a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}+a$	1

이 모집단에서 크기가 5인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$의 평균이 5일 때, $\sigma(\overline{X})$는?23)

① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

✏ 모집단(모분포)이 정규분포이면, 표본평균의 분포는 정규분포이다.
✔ 모집단이 임의의 분포여도 표본의 분포는 n이 충분히 크면 정규분포로 수렴한다.

개념11

024.

어느 회사에서 생산되는 음료수 1병의 무게는 평균이 100g, 표준편차가 20g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산되는 음료수 중에서 25개의 음료수를 임의 추출하여 구한 평균 무게를 $\overline{X}$라 하자.

$$\mathrm{P}(|\overline{X}-100| \le a) = 0.9876$$

을 만족시키는 상수 a의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하여라.24)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

025.

정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $\mathrm{N}(3,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 1) = \mathrm{P}(\overline{Y} \le a)$를 만족시키는 상수 a의 값은?25)

① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

✏ 표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본의 평균이 $\overline{x}$일 때, $\alpha\%$로 모평균 m을 추정하면, 신뢰구간은 아래와 같다.

$$\overline{x}-z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{단, } \mathrm{P}(-z_{\alpha} \le Z \le z_{\alpha}) = \alpha\%)$$

※ 표본이 충분히 크면, σ 대신 표본의 표준편차 s를 쓸 수 있다.

개념12

026.

어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 중에서 임의추출한, 크기가 49인 표본을 조사하였더니 초콜릿 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$이었다. 이 결과를 이용하여, 이 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $1.73 \le m \le 1.87$이다. $\frac{\sigma}{\overline{x}}=k$일 때, $180k$의 값을 구하여라.26) (단, 무게의 단위는 g이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.)

027.

어느 고등학교 학생들의 1개월 자율학습실 이용 시간은 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 25명을 임의추출하여 1개월 자율학습실 이용 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $80-a \le m \le 80+a$이었다.
또 이 고등학교 학생 n명을 임의추출하여 1개월 자율학습실 이용 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 다음과 같다.

$$\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a \le m \le \frac{15}{16}\overline{x_1}+\frac{5}{7}a$$

$n+\overline{x_2}$의 값은?27) (단, 이용 시간의 단위는 시간이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.)

① 121 ② 124 ③ 127
④ 130 ⑤ 133

개념13

✏ 신뢰구간의 길이는 $2z_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. (단, $\mathrm{P}(-z_\alpha \leq Z \leq z_\alpha)=\alpha\%$)

✏ $\mathrm{P}(-z_\alpha \leq Z \leq z_\alpha)=\alpha\%$이다. 95%, 99%만 외웠다가 털리지 말자.

028.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이가 l이었다. 같은 신뢰도로 표본의 크기가 n인 표본을 임의추출하여 신뢰구간의 길이를 $\frac{l}{2}$ 이하로 줄이려고 할 때, n의 최솟값은?28)

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

029.

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 100인 표본의 표본평균 $\overline{x}$를 이용하여 신뢰도 $\alpha\%$로 모평균 m을 추정하려고 한다. Z가 표준정규분포를 따를 때, 양수 k에 대하여

$$\mathrm{P}(Z \geq k)=\frac{1-\frac{\alpha}{100}}{2}$$

이다. 다음 중 모평균 m에 대한 신뢰구간은?29)

① $\overline{x}-\frac{k}{2} \leq m \leq \overline{x}+\frac{k}{2}$

② $\overline{x}-k \leq m \leq \overline{x}+k$

③ $\overline{x}-\frac{3}{2}k \leq m \leq \overline{x}+\frac{3}{2}k$

④ $\overline{x}-2k \leq m \leq \overline{x}+2k$

⑤ $\overline{x}-\frac{5}{2}k \leq m \leq \overline{x}+\frac{5}{2}k$

[통계B2]

1) ⑤

2) ②

3) 25

4) ①

5) ④

6) ③

7) ③

8) ④

9) ④

10) 50

11) 105

12) ④

13) 3

14) ⑤

15) ③

16) ⑤

17) ②

18) ③

19) ②

20) ③

21) ③

22) $\frac{5}{16}$

23) ①

24) 10

25) ③

26) 25

27) ②

28) ⑤

29) ④