원포인트 개념주입 A

# 통계

# 원포인트개념주입

## 통계

**개념1**

✏ 시행을 할 때마다 일정한 확률을 가지고 변하는 수를 확률변수라 한다.
⇒ 확률변수가 가질 수 있는 값을 가로로 나열하고 그 아래에 그 값이 나올 확률을 써놓은 것을 확률분포표라 한다.

✏ 확률변수 $x$에 대하여 $\mathrm{P}(X=x)$를 $X$의 확률질량함수라 한다.

**001.**

검은 공 2개, 흰 공 3개가 들어있는 주머니에서 공 2개를 꺼낼 때, 흰 공의 개수를 $X$라 하자. $X$의 확률분포를 구하여라.1)

**002.**

두 개의 주사위를 던질 때, 두 눈의 차를 확률변수 $X$라 할 때, $X$의 확률분포표를 그리고 $\mathrm{P}(X \leq 1)$을 구하여라.2)

**003.**

서로 다른 세 개의 주사위를 던질 때, 나오는 눈의 수가 짝수인 주사위의 개수를 확률변수 $X$라 할 때, $X$의 확률분포표를 그려라.3)

**004.**

확률변수 $X$의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=i)=ki^2\ (i=1,\ 2,\ 3)$$

일 때, 상수 $k$의 값은?4)

① $\frac{1}{11}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{13}$
④ $\frac{1}{14}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

개념2

✏ 확률변수 $X$에 대해, $\sum_i x_i p_i$를 $X$의 기댓값(평균)이라 하고, $\mathrm{E}(X)$ 또는 $m$으로 쓴다.

✏ $\sum_i (x_i - m)^2 p_i$를 분산이라 하고 $\mathrm{V}(X)$로 쓴다.

✏ $\sqrt{\mathrm{V}(x)}$를 표준편차라 하고 $\sigma(X)$라 쓴다.

## 005.

이산확률변수 $X$의 확률분포가 다음과 같을 때, 평균과 분산을 구하여라.5)

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

## 006.

주사위를 두 개 던져서 나온 눈 중 최소인 것을 $X$라 할 때, $X$의 평균을 구하여라.6)

## 007.

동전을 던져 앞면이 나오면 500원을 얻고 뒷면이 나오면 1000원을 잃는 게임을 했을 때의 기댓값과 표준편차를 구하여라.7)

## 008.

이산확률변수 $X$의 분포가 다음과 같을 때, $X$의 분산을 구하여라.8)

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $2a$ | $\frac{1}{4}$ | $a$ |

## 009.

확률변수 $X$의 확률분포가 아래 표와 같다. 확률변수 $X$의 평균이 5일 때, $X$의 분산을 구하여라.9)

| $X$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $a$ | $\frac{1}{8}$ | $b$ |

개념3

✏ $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$

✏ $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$

✏ $\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

✏ $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

## 010.

확률변수 $X$의 확률분포가 다음과 같을 때, $2X+1$의 확률분포를 구하고 평균과 분산을 구하여라.10)

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

## 011.

확률변수 $X$의 확률분포표가 다음과 같을 때, $aX$의 분산을 구하여라.11)

| $X$ | $-1$ | 0 | 1 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $a$ | $\frac{a}{2}$ | $a^2$ | 1 |

## 012.

확률변수 $X$에 대하여 $\mathrm{E}(X)=5$, $\mathrm{V}(X)=2$일 때, 확률변수 $Y=3X-2$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$, 분산 $\mathrm{V}(Y)$, 표준편차 $\sigma(Y)$를 각각 구하여라.12)

## 013.

두 이산확률변수 $X$, $Y$가 $Y=2X+1$를 만족시키며 $\mathrm{E}(Y)=3$, $\mathrm{E}(X^2)=3$일 때, $\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)$의 값은?13)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

개념4

✏ 시행 횟수를 $n$, 성공할 확률이 $p$인 독립시행에서 성공할 횟수를 $X$라 할 때, 확률변수 $X$의 분포를 이항분포라 하고 이를 $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$로 나타낸다.

✏ $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$일 때, $\mathrm{E}(X) = np$, $\mathrm{V}(X) = npq$이다.

## 014.

타율이 3할인 타자가 2타석에서 안타를 친 횟수를 $X$라 할 때, $X$의 분포를 그려라.14)

## 015.

주사위를 450개 던졌을 때, 3의 배수가 나온 것들의 개수를 $X$라 하자. $X$의 평균과 분산을 구하여라.15)

## 016.

9개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 갯수 $X$에 대하여 $400X-200$원을 상금으로 받는 게임의 기댓값은 얼마인가?16)

## 017.

확률변수 $X$가 가지는 값이 0, 1, 2, $\cdots$, 18이며 확률질량함수가 $\mathrm{P}(X=x) = {}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$ 이다. $\mathrm{E}(X^2)$을 구하여라.17)

## 018.

이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 $X$에 대하여 $\mathrm{P}(X=3) = 2\mathrm{P}(X=1)$이 성립할 때, $n$의 값을 구하여라.18)

개념5

✏ 확률변수 $X$가 연속적인 값을 가지는 것이 가능할 때, $X$를 연속확률변수라 한다.

✏ 연속확률변수 $X$에 대해, $\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$인 함수 $f(x)$를 $X$의 확률밀도함수라 한다. 이때, $X \sim f(x)$로 나타낸다.

## 019.

연속확률변수 $X$의 확률밀도함수가

$f(x) = \frac{1}{2}x \, (0 \le x \le 2)$

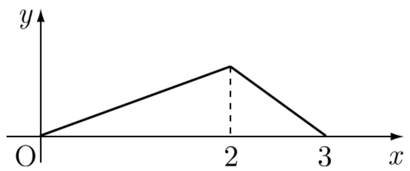
일 때, $\mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{2}\right)$를 구하여라.[19)]

## 020.

확률변수 $X$가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 3$이고, 확률밀도함수의 그래프는 아래와 같다.

$\mathrm{P}(m \le X \le 2) = \mathrm{P}(2 \le X \le 3)$

일 때, $m$의 값은?[20)]




## 021.

연속확률변수 $X$의 확률밀도함수가 $f(x) = kx \, (0 \le x \le 3)$일 때, 다음을 구하여라.[21)]

(1) $k$의 값

(2) $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$

(3) $\mathrm{P}\left(X \ge \frac{5}{2}\right)$

✏ 확률변수 $X$의 분포가 평균 $n$, 분산 $\sigma^2$인 정규분포일 때, $X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$라 쓴다.
✔ 평균 $m$, 분산 $\sigma^2$로 주어졌을 때, "가장 자연스러운" 확률변수의 분포가 정규분포이다. 삼라만상이 정규분포를 따른다.
✔ 표준화 : $X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$일 때, $Z = \dfrac{X-m}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,\ 1^2)$

개념6

## 022.

$X \sim \mathrm{N}(60,\ 6^2)$일 때, 아래 표준정규분포표를 이용하여 다음을 구하여라.22)

| $z$ | $\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

(1) $\mathrm{P}(60 \le X \le 66)$

(2) $\mathrm{P}(60 \le X \le 69)$

(3) $\mathrm{P}(54 \le X \le 60)$

(4) $\mathrm{P}(54 \le X \le 66)$

(5) $\mathrm{P}(57 \le X \le 72)$

## 023.

어느 농장의 사과의 무게(g)는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 12^2)$을 따른다고 한다. 이 농장의 사과는 106g 이상이 상급품으로 분류된다고 한다. 이 농장에서 1000개의 사과를 생산했을 때, 상급품은 평균적으로 몇 개씩 나오는가?23) (왼쪽 표준정규분포표를 이용하여라.)

## 024.

어느 시험에서 학생들의 점수는 정규분포 $\mathrm{N}(80,\ 6^2)$을 따른다고 한다. 이 시험에서 89점을 받은 학생은 상위 몇 %에 해당되는가?24) (왼쪽 표준정규분포표를 이용하여라.)

## 025.

세 연속확률변수 $X,\ Y,\ Z$에 대하여

$$X \sim \mathrm{N}(1,\ 2^2),\quad Y \sim \mathrm{N}(2,\ 1^2),\quad Z \sim \mathrm{N}(0,\ 1^2)$$

이며 $\mathrm{P}(-3 \le X \le 3) = a$, $\mathrm{P}(1 \le Y) = b$일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$의 값을 $a,\ b$를 사용하여 나타내면?25)

① $b-a+0.5$　② $a-b+0.5$
③ $a+b-0.5$　④ $b-a$
⑤ $b-a-0.5$

✏ $X \sim \mathrm{B}(n,\ p)$일 때, $n$이 충분히 크면, 이를 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$로 근사시킬 수 있다.

개념7

## 026.

주사위 720개를 던질 때, 6의 눈이 94번 이상 135번 이하가 나올 확률을 구하여라.[26] (단, 표준정규분포를 따르는 확률변수 $Z$에 대하여 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.6) = 0.49$, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$로 계산한다.)

## 027.

5회에 2개의 비율로 안타를 치는 야구 선수가 150회에 75개 이상의 안타를 칠 확률은?[27]
(단, $Z$가 표준정규분포를 따를 때,
$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$이다.)

① 0.0062 ② 0.0124 ③ 0.2431
④ 0.4938 ⑤ 0.4986

## 028.

한 개의 동전을 100번 던질 때 앞면이 40번 이하로 나올 확률과 한 개의 주사위를 450번 던질 때 3의 배수의 눈이 $a$번 이상 나올 확률이 같다고 한다.
이 때, $a$의 값은?[28]

① 160 ② 165 ③ 170
④ 175 ⑤ 180

## 029.

어떤 음식점에서 93개의 좌석이 있는데 100석의 예약을 받았다고 한다. 각각의 손님이 예약을 취소할 확률이 10%라 할 때, 음식점에 온 손님 모두가 식사를 하게 될 확률을 구하여라.[29] (단, $Z$가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$)

✏ 모평균이 $m$이고 모표준편차가 $\sigma$인 모집단에서 크기 $n$인 표본을 복원추출하여

표본평균을 $\overline{X}$라 하면, $\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$이다.

$\Rightarrow$ 확률변수 $X$를 $n$개 복원추출하여 그 평균을 $\overline{X}$라 하면,

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}$이다.

개념8

✔ $n$이 충분히 크면 $\overline{X}$는 정규분포를 따른다. 즉, $\overline{X}\sim \mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$이다.

## 030.

확률변수 $X$가 다음과 같은 확률분포를 가질 때, 2개의 $X$를 복원추출해서 평균을 낸 $\overline{X}$의 분포를 구하고 평균과 분산을 구하여라.30)

| $X$ | 1 | 5 |
|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

## 031.

확률변수 $X$가 다음과 같은 확률분포를 가질 때, 2개의 $X$를 복원추출해서 평균을 낸 $\overline{X}$의 분포를 구하고 평균과 분산을 구하여라.31)

| $X$ | $-6$ | 0 | 6 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ |

## 032.

어느 회사에서 생산되는 통조림의 무게는 평균이 450g이고, 표준편차가 16g이라고 한다. 이 중에서 64개의 통조림을 임의추출할 때, 무게의 표본평균이 446g 이상이 될 확률은?32) (단, $Z$가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$로 계산한다.)

## 033.

어떤 시험에서 어느 학교 학생들의 점수가 평균 500점, 표준편차가 12점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교에서 36명의 학생을 임의 추출하여 점수의 표본평균 $\overline{X}$를 구하였다. 이때, $\mathrm{P}(\overline{X}\le 495)$의 값은 얼마인가?33) (단, $Z\sim \mathrm{N}(0,\ 1)$일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.5)=0.98$로 계산한다.)

✏ 신뢰도 $\alpha\%$인 신뢰구간 : $\overline{x}-z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, $P(-z_{\alpha}\le Z\le z_{\alpha})=\alpha\%$)

개념9

⇒ 신뢰도 95%인 신뢰구간 : $\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

⇒ 신뢰도 99%인 신뢰구간 : $\overline{x}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

※ 모표준편차 $\sigma$ 대신에 표본표준편차 $\sigma$를 쓸 수 있다.

## 034.

어떤 도시 학생의 키의 평균을 추정하려 한다. 이 도시 학생의 키의 표준편차는 6cm임이 알려져 있고, 100명을 임의추출하여 조사하였더니 평균이 167cm이었다. 이 때, 키의 평균을 신뢰도 95%로 추정하여라.[34] (단, $Z$가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z|\le 2)=0.95$이다.)

## 035.

어느 회사에서 생산되는 제품 중에서 25개를 임의추출하여 무게를 조사하였더니 표본평균, 표본표준편차가 각각 64g, 5g이었다. 이 제품의 무게의 평균을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간은?[35] (단, $Z$가 표준정규분포를 따를 때, $P(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$)

① $63.05\le m\le 64.95$
② $62.35\le m\le 65.65$
③ $62.04\le m\le 65.96$
④ $61.84\le m\le 65.16$
⑤ $61.42\le m\le 66.58$

## 036.

S회사에서 생산되는 최신형 MP3 플레이어의 연속 재생 시간은 표준편차가 1시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 MP3 플레이어 중에서 144개를 임의 추출하여 연속 재생 시간을 조사하였더니 평균이 100시간이었다. 이 때, 이 회사에서 생산되는 MP3 플레이어의 연속 재생 시간의 평균 $m$을 신뢰도 99%로 추정하면?[36] (단, $P(|Z|\le 3)=0.99$)

## 037.

어느 회사에서 생산하는 통조림의 무게는 평균이 $m$g이고 표준편차가 10g인 정규분포를 따른다. 이 통조림 25개를 추출하여 표본평균을 구했더니 502g이었을 때, 신뢰도 98%의 신뢰구간은?[37] (단, $P(0\le Z\le 2.5)=0.49$)

개념10

✏ 신뢰도 $\alpha\%$인 신뢰구간의 길이 : $2z_{\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (단, $\mathrm{P}(-z_{\alpha}<Z<z_{\alpha})=\alpha\%$)

$\Rightarrow$ 신뢰도 95%인 신뢰구간의 길이 : $2\cdot 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow$ 신뢰도 99%인 신뢰구간의 길이 : $2\cdot 2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

## 038.

정규분포를 따르고 표준편차가 2인 모집단의 평균에 대하여 신뢰도 95%인 신뢰구간을 구할 때, 신뢰구간의 길이를 1 이하로 하려면 표본의 크기를 얼마로 하면 되는가?38)

(단, $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$)

## 039.

어느 공장에서 생산되는 제품 100개를 추출하여 그 무게를 조사하였더니 표준편차가 40g이었다고 한다. 이 공장에서 생산되는 제품의 무게를 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이는 5g 이하로 하기 위한 표본의 크기는?39)

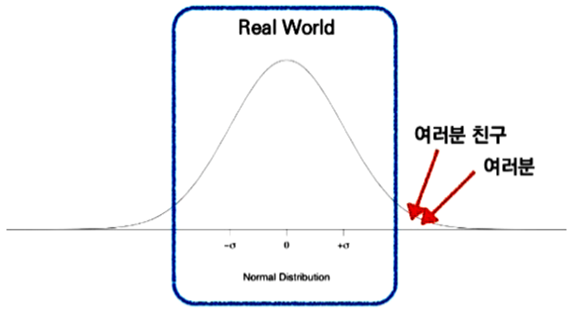
(단, $\mathrm{P}(-1.96\le Z\le 1.96)=0.95$)

## 040.

표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 평균을 이용하여 모평균을 추정하려고 한다. 신뢰구간의 길이가 6인 경우의 표본의 크기가 16일 때, 같은 신뢰도로 추정하여 신뢰구간의 길이가 3이 되도록 하려면 표본의 크기를 얼마로 해야 하는가?40)

① 4 ② 8 ③ 32
④ 64 ⑤ 128

# 세상은 정규분포



## [통계A]

1)

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

2)

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ |

3)

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

4) ④

5) $\mathrm{E}(X)=\frac{5}{3}$, $\mathrm{V}(X)=\frac{5}{9}$

6) $\frac{91}{36}$

7) $-250$, $750$

8) $\frac{19}{18}$

9) $\frac{39}{4}$

10)

| $2X+1$ | 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

$\mathrm{E}(2X+1)=\frac{13}{3}$,

$\mathrm{V}(2X+1)=\frac{20}{9}$

11) $\frac{11}{64}$

12) 13, 18, $3\sqrt{2}$

13) ③

14)

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{49}{100}$ | $\frac{42}{100}$ | $\frac{9}{100}$ |

15) 150, 100

16) 1600

17) 40

18) 5

19) $\frac{1}{16}$

20) $\sqrt{2}$

21) (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{11}{36}$

22) (1) 0.3413 (2) 0.4332

(3) 0.3413 (4) 0.6826

(5) 0.6687

23) 309개

24) 약 7%

25) ②

26) 0.92

27) ①

28) ③

29) 0.8413

30)

| $\overline{X}$ | 1 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(\overline{X}=x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{9}{16}$ |

$\mathrm{E}(\overline{X})=4$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{3}{2}$

31)

| $\overline{X}$ | $-6$ | $-3$ | 0 | 3 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(\overline{X}=x)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{13}{36}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{36}$ |

$\mathrm{E}(\overline{X})=-1$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{17}{2}$

32) 0.9772

33) 0.01

34) [165.8, 168.2]

35) ③

36) $99.75 \le m \le 100.25$

37) [497, 507]

38) 62 이상

39) 984 이상

40) ④