[확률의 뜻과 활용]

B08 | 시행과 사건

개념1 시행과 사건

① 시행 : 어떤 일을 하는 것

② 표본공간 : 시행의 가능한 모든 결과들의 집합

⇒ 근원사건 : 표본공간의 원소

③ 사건 : 표본공간의 부분집합

※ 사건은 집합이므로, 벤다이어그램으로 나타낼 수 있고,

여집합, 합집합, 교집합 등의 집합의 연산이 가능하다.

eg) "시행 : 주사위를 던진다."에 대하여 다음 사건을 정의하여라.

(1) 사건 A : 짝수가 나온다.

(2) 사건 B : 3 이하가 나온다.

(3) 사건 A^c

(4) 사건 $A \cap B$

B09 | 확률의 뜻

개념1 사건의 확률

① 확률 : 근원사건들이 가지고 있는 각각이 일어날 가능성

② 사건의 확률 : 사건 내의 근원사건들이 가지는 확률의 합

Notation 사건 A의 확률 : $\mathrm{P}(A)$

※ $\mathrm{P}(A)$가 가지는 성질, 연산법칙 등은 $n(A)$와 매우 유사하다.

예제1 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공 3개를 임의로 꺼낼 때,

(1) 표본공간을 구하고, 근원사건들의 확률을 각각 구하여라.

(2) 흰 공이 2개 이하가 나오는 사건을 A라 할 때, $\mathrm{P}(A)$를 구하여라.

(3) 사건 A^c을 설명하고, $\mathrm{P}(A^c)$을 구하여라.

(4) 모두 같은 색의 공이 나오는 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(B)$를 구하여라.

(5) 사건 $A\cap B$를 설명하고, $\mathrm{P}(A\cap B)$을 구하여라.

개념2 확률의 성질

① $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$ ② $0\le \mathrm{P}(A)\le 1$

③ $\mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)$ ④ $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

예제2 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있는 주머니에서 공 1개를 임의로 꺼내는 시행에서 나올 수 있는 모든 경우의 수와 각각의 확률을 구하여라.

※ "모든 공이 뽑힐 확률이 같다." ⇒ 모두 다른 것으로 봐야 한다.

예제3 다음 시행의 표본공간과 확률을 구하여라.

(1) 서로 다른 주사위 두 개를 던지는 시행

(2) 하나의 주사위를 두 번 던지는 시행

(3) 서로 같은 주사위 두 개를 던지는 시행

예제4 주사위 두 개를 던지는 시행에서 두 눈이 1과 2가 나올 확률을 구하여라.

예제5 주사위 두 개를 던지는 시행에서 두 눈이 모두 1이 나올 확률을 구하여라.

예제6 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 공 2개를 임의로 꺼내는 시행에서 흰 공이 2개 나올 확률을 구하여라.

※ 위 문제는 다음과 같이 풀 수 있다. 원리를 생각해보자.

① $\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}$ ② $\dfrac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5}$ ③ $\dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{3}{5}$

예제7 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 공 2개를 임의로 꺼낼 때, 흰 공이 1개, 검은 공이 1개가 나올 확률을 구하여라.

※ 세 가지 방법으로 풀어보면,

① $\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_2}$ ② $\dfrac{4 \cdot 2+2 \cdot 4}{6 \cdot 5}$ ③ $\dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{4}{5}$

예제8 주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d라 할 때, $a \le b \le c \le d$일 확률을 구하여라.

B10 | 확률의 연산

개념1 확률의 용어

① 전사건 S : 반드시 일어나는 사건

② 공사건 $\varnothing$: 절대로 일어나지 않는 사건

③ A의 여사건 A^c : A가 일어나지 않는 사건

④ A와 B의 합사건 $A \cup B$: A 또는 B가 일어나는 사건

⑤ A와 B의 곱사건 $A \cap B$: A와 B가 동시에 일어나는 사건

⑥ A와 B가 서로 배반사건 : $A \cap B = \varnothing$

개념2 근원 사건들의 확률이 모두 같으면,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{(\text{사건 } A\text{가 일어나는 경우의 수})}{(\text{일어날 수 있는 모든 경우의 수})}$$

예제1 다섯 사람 a, b, c, d, e를 임의로 일렬로 나열할 때,

(1) a와 b가 이웃하지 않을 확률을 구하여라.

(2) a와 b가 이웃하거나 c와 d가 이웃할 확률을 구하여라.

(3) a와 b가 이웃하거나 b와 c가 이웃할 확률을 구하여라.

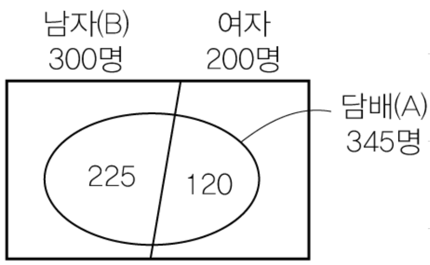
예제2 주머니에 a, a, a, b, b, c의 문자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 문자끼리는 이웃하지 않게 배열될 확률을 구하여라.

[조건부 확률]

B11 | 조건부 확률의 뜻

개념1 $\mathrm{P}(A|B)$: 사건 B가 일어날 때, 사건 A가 일어날 확률

예제1 주어진 벤다이어그램에서 다음을 구하여라.



(1) $\mathrm{P}(A|B)$　　(2) $\mathrm{P}(A\cap B)$

(3) $\mathrm{P}(B|A)$　　(4) $\mathrm{P}(A^c|B)$

(5) $\mathrm{P}(A|B^c)$　　(6) $\mathrm{P}(A\cap B^c)$

예제2 한 개의 주사위를 던져서 2 이하가 나오는 사건을 A, 소수가 나오는 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B|A)$의 값을 구하여라.

B12 | 확률의 곱셈법칙

개념1 $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$: 조건부 확률의 정의

$\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)$: 확률의 곱셈정리

※ 식의 의미는 (B가 일어날 확률)×(B가 일어났을 때, A가 일어날 확률)이다.

※ 반대로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)$도 성립한다.

※ 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

예제1 지혜와 수연이가 어느 마라톤 코스를 완주할 확률은 각각 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$이다.

이 마라톤 코스에서 마라톤 대회가 열려서 두 사람 모두 참가했을 때,

지혜는 완주하지 못하고 수연이는 완주할 확률을 구하여라.

예제2 3개의 당첨 제비를 포함한 12개의 제비가 있다. 갑, 을의 순서로 임의로

1개씩 제비를 뽑을 때, 갑은 당첨 제비를 뽑지 못하고 을만 당첨 제비를

뽑을 확률을 구하여라. (단, 뽑은 제비는 다시 넣지 않는다.)

B13 | 조건부 확률의 연산

개념1 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)$

$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A|B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A|B^c)\mathrm{P}(B^c)$

예제1 다음을 구하여라.

(1) $\mathrm{P}(A|A)$

(2) $\mathrm{P}(A^c|A)$

(3) $\mathrm{P}(A|A^c)$

예제2 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(B|A)=0.5$,

$\mathrm{P}(B|A^c)=0.3$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값을 구하여라.

예제3 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A|B)=0.2$,

$\mathrm{P}(A\cup B)=0.6$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값을 구하여라.

B14 | 문장제 조건부 확률

예제1 어떤 야구팀은 날씨에 따라 이길 확률이 다르다고 한다.

날씨가 맑은 날의 경기에서 이길 확률은 0.6이고, 맑지 않은 날의

경기에서 이길 확률은 0.5이다. 내일 날씨가 맑을 확률이 0.4라 할 때,

이 팀이 내일 경기에서 이길 확률을 구하여라.

풀이 '내일 날씨가 맑음'을 사건 A, '내일 경기에서 이김'을 사건 B라 하자.

(1) 문제의 조건들과 구하려는 확률을 기호로 나타내어라.

(2) 조건부확률의 연산을 통해 답을 구하여라.

✓ 정석대로 풀면 빡치니까 문제에 따라서 표/수형도를 이용해서 푼다.

B14E1 | 이중분할 표 그리기

✓ 가로로 A와 A^c을, 세로로 B와 B^c을 써서 만들어지는 4칸을
문제에 주어진 조건에 따라 잘 채워 넣어본다.

예제1 남녀 공학인 어느 고등학교 학생 중 50%는 남학생이고,
동생이 있는 남학생은 전체의 25%이다. 이 고등학교의 남학생 중
임의로 한 명을 뽑을 때, 그 학생이 동생이 있는 학생일 확률을 구하여라.

예제2 어느 회화 학원의 수강생 중 70%가 대학생이고, 대학생 중
40%가 남자라 한다. 그리고 대학생이 아닌 수강생의 50%가 남자라 한다.
이 학원의 수강생 중 임의로 뽑힌 한 사람이 남자일 때,
이 사람이 대학생일 확률을 구하여라.

예제3 암환자를 암이라고 진단할 확률이 95%이고, 암환자가 아닌 사람을
암으로 진단할 확률이 10%인 검사가 있다고 하자. 어떤 사람이 이 검사에서
암이라고 진단을 받았을 때, 그 사람이 실제로 암환자일 확률을 구하여라.
(단, 전체 인구 중 10%가 암환자이다.)

B14E2 | 확률 수형도 그리기

✓ 선행-후행사건에 따른 경우의 수를 수형도로 그린 후
각각의 가지마다 가지는 확률을 조사한다.

예제1 주머니 A에는 흰 공 3개와 파란 공 2개가, 주머니 B에는 흰 공 4개와 파란 공 3개가 들어 있다. A에서 임의로 1개의 공을 꺼내 B에 넣고 섞은 뒤 B에서 임의로 1개의 공을 꺼냈을 때, 파란 공일 확률을 구하여라.

예제2 어느 상자에 당첨제비 2개를 포함한 10개의 제비가 들어 있다. 갑과 을이 순서대로 임의로 제비를 뽑을 때, 을이 당첨될 확률을 구하여라.

예제3 어디에 들리기만 하면 $\frac{1}{3}$의 확률로 우산을 놓고 다니는 지원이는 우산을 가진 채로 하교하여 학원, PC방, 독서실에 들렀다가 집으로 와서 보니 아니나 다를까 우산이 없었다. 우산이 PC방에 있을 확률을 구하여라.

※ 주로 도수의 개수 등의 통계삘 문제는 이종분할표가 편하고
선행-후행이 확실하게 갈리는 시행의 문제는 확률수형도가 편하다.

B15 | 사건의 독립과 종속

개념1 두 사건 A와 B가 서로 독립이다 : 두 사건은 서로 무관하다.

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)$ (영향을 받지 않는다.)

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ (적당히 겹친다.)

✓ 두 사건 A와 B가 서로 독립이 아니면 서로 종속이라고 한다.

예제2 동전 하나와 주사위 하나를 동시에 던져 동전의 앞면이 나오는 사건을 A, 주사위의 눈이 1이 나오는 사건을 B라 할 때, 다음을 보여라.

(1) $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)$

(2) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^c)$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

예제1 주사위 하나를 던져 눈이 짝수가 나오는 사건을 A, 눈이 6의 약수가 나오는 사건을 B, 눈이 3 이하가 나오는 사건을 C라 할 때, 다음을 보여라.

(1) $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^c)$

(2) $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B|A^c)$

(3) $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

(4) $\mathrm{P}(A\cap C)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

B15E1 | 독립의 의미와 연산

개념1 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 두 사건 A와 B^c도 서로 독립이다.

증명 ① 의미상 당연하다. ② 대수적으로도 확인해보자.

개념2 A와 B가 서로 독립 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{P}(A):\mathrm{P}(A^c)=\mathrm{P}(A|B):\mathrm{P}(A^c|B)=\mathrm{P}(A|B^c):\mathrm{P}(A^c|B^c)$

(명)	남자	여자
담배	200	300
담배X	100	100

※ 독립이 아니다.

(명)	남자	여자
담배	60	30
담배X	40	x

※ 독립이다.

개념3 두 사건 A와 B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

예제1 두 사건 A와 B가 서로 독립이고,

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A\cup B)=0.7$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값을 구하여라.

예제2 두 사건 A와 B가 서로 독립이고,

$\mathrm{P}(A|B)=0.6$, $\mathrm{P}(B|A^c)=0.4$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값을 구하여라.

예제3 두 사람이 과녁에 화살을 쏠 때, 과녁에 명중할 확률은 각각 0.6, 0.5이다.

두 사람이 화살을 한 번씩 쏠 때, 적어도 한 발이 과녁에 명중할 확률을 구하여라.

B16 | 독립시행

개념1 사건 A가 일어날 확률이 p인 시행을 n번 반복할 때,

사건 A가 k번 일어날 확률은 ${}_n\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{n-k}$이다.

예제1 다음을 구하여라.

(1) 주사위를 4개 던질 때, 1이 두 개 나올 확률

(2) 5지선다 6문제를 임의로 찍을 때, 2문제 맞을 확률

(3) 30% 타율의 타자가 3타석에서 1안타를 칠 확률

(4) 동전 4개를 던질 때, 앞면이 3개 나올 확률

(5) 5지선다 4문제를 임의로 찍을 때, 3문제 이상 맞을 확률

예제2 원점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P는 동전을 던져서

앞면이면 양의 방향으로 2만큼, 뒷면이면 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

동전을 다섯 번 던졌을 때, 점 P의 좌표가 양수일 확률을 구하여라.

예제3 두 팀이 5번의 경기 중 3번을 먼저 이기면 우승하는 결승전을 한다.

첫 번째 경기를 이긴 팀이 우승할 확률을 구하여라.

(단, 각 경기에서 어느 팀이 이길 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다.)

B16E1 | 다항분포의 확률

예제1 주사위를 여섯 번 던졌을 때, 눈의 수가 $1 \sim 3$이 두 번, $4 \sim 5$가 세 번, 6이 한 번 나올 확률을 구하여라.

예제2 좌표평면 위의 점 P는 주사위를 던져 다음과 같은 규칙에 따라 움직인다.

ⅰ) 3 이하의 눈이 나오면 x축의 방향으로 1만큼 움직인다.

ⅱ) 4의 눈이 나오면 x축의 방향으로 -1만큼 움직인다.

ⅲ) 5 이상의 눈이 나오면 y축의 방향으로 1만큼 움직인다.

원점에서 출발한 점 P가 주사위를 여섯 번 던진 후 점 $(2,\ 2)$에 위치할 확률은?