원포인트 개념주입 B

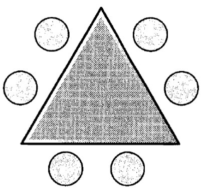
경우의 수

개념1

✏ 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는 $(n-1)!$이다.
⇒ 나누는 것과 하나를 고정하는 풀이를 모두 익혀 놓자.

001.

그림과 같은 정삼각형 모양의 탁자에
6명의 학생이 둘러앉는 방법의 수는?1)



① 120 ② 160 ③ 240
④ 280 ⑤ 320

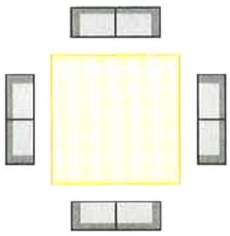
002.

초등학생 2명, 중학생 2명, 고등학생 3명이 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 초등학생 2명은 이웃하고, 중학생 2명은 이웃하지 않게 앉는 방법의 수는?2)

① 36 ② 48 ③ 72
④ 108 ⑤ 144

003.

어느 대학교 2학기 수시 모집에 지원한 남학생 4명과 여학생 4명을 토론식 면접을 하기 위하여 아래 그림과 같이 정사각형 모양으로 배열된 8개의 의자에 앉히려 한다. 붙어 있는 의자에는 반드시 남녀가 1명씩 앉도록 할 때, 이들 8명이 앉을 수 있는 모든 경우의 수는?3)



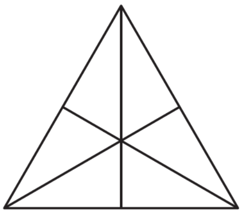
① 1152 ② 2304 ③ 4608
④ 5760 ⑤ 9216

개념2

✏ 도형에 색칠하는 방법의 수는 알아서 푼다.

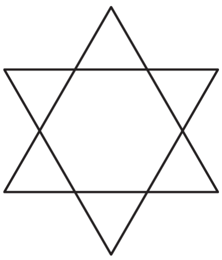
004.

그림과 같이 정삼각형을 6등분한 도형에 서로 다른 6가지 색을 모두 칠하여 구별하는 경우의 수를 구하여라.[4] (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



005.

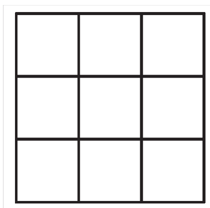
그림과 같이 서로 합동인 정삼각형 6개가 각각 정육각형과 한 변씩을 공유하고 있다. 이 도형을 서로 다른 7가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한가지 색만을 칠할 때, 도형을 색칠하는 경우의 수는?[5] (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① 630 ② 700 ③ 770
④ 840 ⑤ 910

006.

그림과 같이 정사각형 9개가 붙어 있다. 이 9개의 정사각형의 내부에 서로 다른 9가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는?[6] (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① $9\times7!$ ② $9\times7!\times2$ ③ $9\times7!\times3$
④ $9\times8!\times2$ ⑤ $9\times8!\times3$

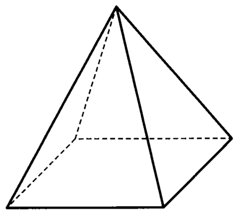
개념3

✏ 입체 도형에 색칠하는 방법의 수 : 적당히 칠하면서 시작한다.

$\Rightarrow$ 정다면체에 색칠하는 방법의 수 : $\dfrac{(n-1)!}{(\text{한 면의 모서리의 수})}$

007.

다음 그림과 같은 정사각뿔의 각 면을 서로 다른 5가지의 색을 모두 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.[7]

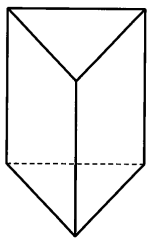


008.

정육면체 모양의 주사위에 6가지 색을 모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.[8]

009.

그림과 같은 정삼각기둥의 다섯 개의 면을 서로 다른 5가지의 색을 사용하여 칠하는 방법의 수를 구하여라.[9] (단, 모든 색을 사용할 필요는 없으며 이웃하는 면에는 서로 다른 색을 칠한다.)



개념4

✏ 중복순열 : ${}_n\Pi_r = n^r$

010.

다음 경우의 수를 구하여라.[10]

(1) ○, ×로 답하는 5개의 문제에서 나올 수 있는 답안의 개수

(2) 6명의 투표자가 3명의 후보에게 기명 투표하는 방법의 수

(3) 서로 다른 편지 4개를 서로 다른 3개의 우체통에 넣는 방법의 수

(4) 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3 중 중복을 허용하여 3개를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수

(5) 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중 중복을 허용하여 4개를 뽑아 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 3000보다 큰 자연수의 개수

(6) 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$ 중 $f(3)=3$를 만족시키는 경우의 수

011.

서로 다른 종류의 연필 5자루를 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?[11] (단, 연필을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 1024 ② 1034 ③ 1044
④ 1054 ⑤ 1064

012.

집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$를 정의역과 공역으로 하는 함수 f 중 다음 조건을 만족시키는 것의 개수는?[12]

> 모든 $x\in X$에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.

① 7 ② 7^2 ③ 7^3
④ 7^4 ⑤ 7^5

✏ 같은 것이 있는 순열 :

같은 것이 a개, b개, c개, $\cdots$해서 총 n개를 배열하는 방법의 수는 $\dfrac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdots}$이다.

개념5

✔ 순서가 정해진 순열 : 같은 것으로 취급한다.

013.

0, 1, 1, 1, 2, 2, 3의 7개 숫자를 모두 사용하여 7자리의 자연수를 만들 때, 짝수인 것의 개수를 구하여라.13)

014.

8개의 계단으로 이루어진 계단을 한 걸음에 한 계단 또는 두 계단을 올라간다고 할 때, 이 계단을 오르는 방법의 수를 구하여라.14)

015.

1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드는 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는?15)

① 56　② 60　③ 64　④ 68　⑤ 72

✏ 최단 경로의 수 기본 : $\dfrac{(a+b)!}{a! \cdot b!}$

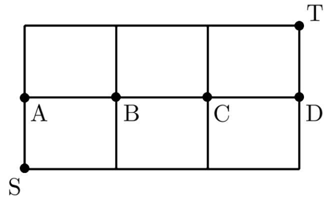
✔ 특정 교차로 A를 잡고, 어느 교차로에서 올 수 있는 지를 살피고 그 교차로까지 오는 방법의 수들을 합하면, A까지 이르는 방법의 수를 구할 수 있다.

✔ 분할하는 방법 : 대각선으로

개념6

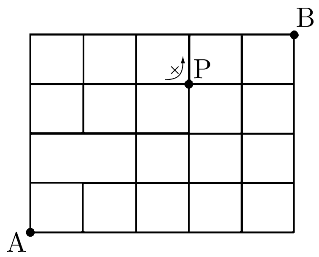
016.

그림과 같은 도로망을 따라 S지점에서 출발하여 T지점까지 최단거리로 이동할 때, A지점, B지점, C지점, D지점을 각각 거쳐서 가는 방법의 수들을 모두 더한 값을 구하여라.16)



017.

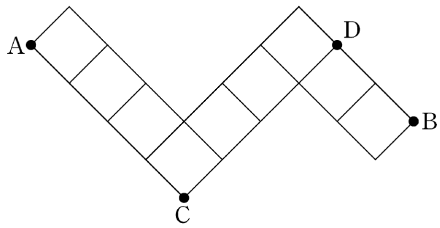
그림과 같이 P지점에서는 좌회전이 금지되어 있는 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이때 A지점에서 B지점까지 최단 경로의 수는?17)



① 90 ② 94 ③ 96
④ 100 ⑤ 104

018.

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고, D지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?18)



① 26 ② 24 ③ 22
④ 20 ⑤ 18

✏ 서로 다른 n개 중 중복을 허용하여 r개를 뽑는 방법의 수를 ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$이라 한다.
✏ ${}_{n}\mathrm{H}_{r} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_{r}$이다.

개념7

019.

다음 경우의 수를 구하여라.[19)]

(1) 장미, 튤립, 국화 세 종류의 꽃 중에서 10송이를 선택하는 방법의 수

(2) $(a+b+c)^7$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수

(3) 서로 구별할 수 없는 음료수 8개를 네 명에게 나눠주는 방법의 수

(4) 6명의 투표자가 3명의 후보에게 무기명 투표하는 방법의 수

(5) $x+y+z+w=5$를 만족시키는 0 이상의 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수

020.

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?[20)] (단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 330 ② 315 ③ 300
④ 285 ⑤ 270

개념8

✏ ${}_{n}\mathrm{H}_{r}$은 $a+b+c+\cdots+n=r$의 0 이상 정수해의 개수와 같다.
⇒ '자연수 해' 등의 조건을 다룰 수 있다.

021.

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 x, y, z에 대하여 음이 아닌 정수해의 개수는 a이고, 양의 정수해의 개수는 b일 때, $a-b$의 값은?21)

① 15 ② 28 ③ 30
④ 45 ⑤ 50

022.

연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?22)

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

023.

다음 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하여라.23)

(가) $a+b+c+d=20$
(나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

개념9

✏ $X=\{1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$, $Y=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$일 때,
$x_1 < x_2$면 $f(x_1) \le f(x_2)$을 만족하는 $f : X \to Y$인 함수의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

※ $x_1 < x_2$면 $f(x_1) < f(x_2)$을 만족하는 $f : X \to Y$인 함수의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

024.

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2\}$에 대하여 $f : A \to B$인 함수 중에서

$$f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$$

를 만족시키는 함수의 개수는?[24)]

① 6 ② 9 ③ 16
④ 21 ⑤ 25

025.

세 정수 a, b, c에 대하여

$$1 \le |a| \le |b| \le |c| \le 5$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?[25)]

① 360 ② 320 ③ 280
④ 240 ⑤ 200

026.

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 중

$$f(1) \le f(2) < f(3) < f(4) \le f(5)$$

를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.[26)]

027.

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는?[27)]

(가) 임의의 x_1, $x_2 \in A$에 대하여
$x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \ge f(x_2)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 64 ② 82 ③ 100
④ 120 ⑤ 128

✏ 이항정리 : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$

개념8

$\Rightarrow$ $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^k b^{n-k}$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_k$이다.

028.

$\left(mx - \dfrac{1}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수가 12일 때, 상수 m의 값을 구하여라.28)

029.

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{2n}$의 전개식에서 x^2, x^4, x^6의 계수가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 자연수 n의 값은?29)

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

030.

$(x^2+1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$의 전개식에서 상수항을 구하여라.30)

031.

$(x+1)^8(x-1)^4$의 전개식에서 x^{10}의 계수를 구하여라.31)

032.

$(a+2b+c)^5$의 전개식에서 a^2b^2c의 계수는?32)

① 30　② 50　③ 100
④ 120　⑤ 150

✏ 이항계수의 성질 :
기본 : ① 합 ② 짝수/홀수 합 ③ 하키스틱
옵션 : ④ 미분 ⑤ 적분 ⑥ i대입

개념9

033.

서로 다른 색깔의 색연필 10자루에서 6자루 이상을 택하는 경우의 수는?33)

① 382 ② 386 ③ 390
④ 394 ⑤ 398

034.

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에 대하여
$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{10}t^{10}$일 때,
a_7의 값은?34) (단, a_0, a_1, $\cdots$, a_{10}은 상수)

① 159 ② 161 ③ 163
④ 165 ⑤ 167

035.

다음은 n이 소수일 때, ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수임을 증명한 것이다.

$$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k x^k$$

에서 $\boxed{(가)}$의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$이다.
한편

$$(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{n-k}x^{n-k}\right)$$

에서 $\boxed{(가)}$의 계수는

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_k\cdot\boxed{(나)}\right)$이다. 따라서

$${}_{2n}\mathrm{C}_n=\left({}_n\mathrm{C}_0\right)^2+\left({}_n\mathrm{C}_1\right)^2+\left({}_n\mathrm{C}_2\right)^2+\cdots+\left({}_n\mathrm{C}_n\right)^2$$

이다.
그런데 n이 소수이므로 $\boxed{(다)}$인 자연수 k에 대하여 ${}_n\mathrm{C}_k$는 n의 배수이다.
따라서 $\boxed{(다)}$인 자연수 k에 대하여 $\left({}_n\mathrm{C}_k\right)^2$은 n^2의 배수이고 ${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$이므로 ${}_{2n}\mathrm{C}_n-2$는 n^2의 배수이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?35)

	(가)	(나)	(다)
①	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
②	x^n	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
③	x^n	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$
④	x^{2n}	${}_n\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n-1$
⑤	x^{2n}	${}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}$	$1\le k\le n$

[경우의 수B1]

1) ③

2) ⑤

3) ②

4) 240

5) ④

6) ②

7) 30

8) 30

9) 40

10) (1) 32 (2) 729 (3) 81
(4) 48 (5) 249 (6) 125

11) ①

12) ④

13) 160

14) 34

15) ②

16) 20

17) ①

18) ②

19) (1) 66 (2) 36 (3) 165
(4) 28 (5) 56

20) ⑤

21) ③

22) ②

23) 32

24) ①

25) ③

26) 21

27) ④

28) $m=\pm\sqrt{2}$

29) ②

30) 462

31) 2

32) ④

33) ②

34) ④

35) ②