[순열과 조합]

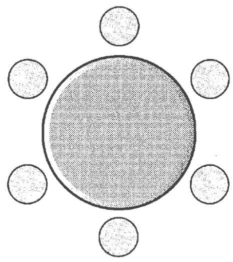
B01 | 원순열

개념1 n명이 원탁에 둘러 앉는 방법의 수는 $(n-1)!$이다.

$\Rightarrow$ 원순열은 앉은 사람들의 상대적 위치관계에만 초점을 맞춘다.

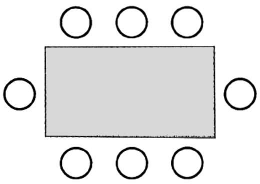
✓ 한명을 미리 고정시켜놓고 시작하는 풀이가 유용하다.

예제1 그림과 같은 원형의 탁자 둘레의 6자리에 6명을 배치하는 방법의 수를 구하여라. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

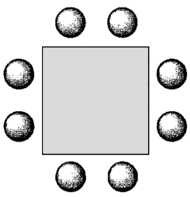


예제2 그림과 같은 탁자에 사람들을 앉히는 방법의 수를 구하여라.

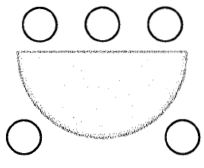
(1)



(2)

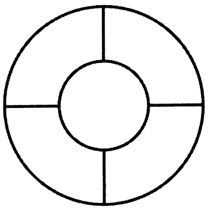


(3)

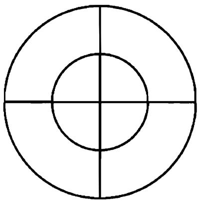


예제3 그림과 같은 모양을 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수를 구하여라.

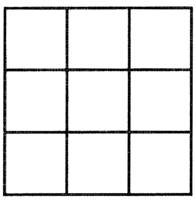
(1)



(2)



(3)



※ 위의 문제들을 'n으로 나누는 풀이'와 '하나를 고정하는 풀이'로

모두 풀고 답을 확인해 보자.

B01E1 | 조건이 걸린 원순열

✓ 나누는 것보다 하나 고정하는 풀이가 편하더라.

예제1 부모를 포함한 여섯 명의 가족이 원탁에 둘러앉을 때,

(1) 부모가 이웃하는 배열 방법의 수를 구하여라.

(2) 부모가 마주보는 배열 방법의 수를 구하여라.

예제2 1, 2, 3학년 학생이 각각 2명씩 6명이 원탁에 둘러앉을 때,

(1) 같은 학년끼리는 이웃하도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.

(2) 같은 학년끼리는 마주보도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.

(3) 1학년은 이웃하고, 2학년은 이웃하지 않도록 배열하는 방법의 수를 구하여라.

예제3 남자 4명, 여자 4명의 8명을 원탁에 앉을 때,

남녀가 교대로 앉는 방법의 수를 구하여라.

B01E2 | 입체도형을 색칠하는 방법의 수

※ 교과과정이 아니지만 원순열을 이해하는 핵심이 되는 내용,

"같은 경우"인지 아닌지를 판별하는 공부가 되므로 해 두도록 하자.

예제1 정사각뿔의 각 면을 서로 다른 5가지 색을 모두 사용하여

칠하는 방법의 수를 구하여라.

예제2 다음 정n면체를 서로 다른 n가지 색을 모두 사용하여 ~

(1) 정육면체 (2) 정사면체

(3) 정팔면체 (4) 정십이면체

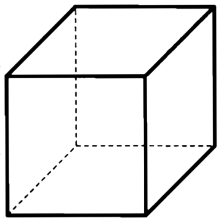
예제3 가로, 세로, 높이가 모두 다른 직육면체를 6가지 색을

모두 사용하여 색칠하는 방법의 수를 구하여라.

예제4 정육면체를 서로 다른 4가지의 색을 이용하여

칠하려고 한다. 이웃하는 면은 같은 색으로 칠하지

않는다고 할 때, 칠하는 방법의 수를 구하여라.



B02 | 중복순열

개념1 ${}_{n}\Pi_{r}$: 서로 다른 n개 중 중복을 허용하여 r개를 뽑아 줄 세우는 방법의 수

$\Rightarrow {}_{n}\Pi_{r} = n^{r}$

※ 문제에 적용할 때 어느 쪽이 n이고 어느 쪽이 r인지가 꽤 헷갈린다.

다음과 같은 방법으로 생각할 수 있다.

① 한 번의 시행에서 줄어드는 쪽이 지수로 올라간다.

② 시행에서 능동적인 쪽이 지수로 올라간다.

③ (추천) 정의역, 공역이라고 치고 함수를 그려서 말이 되는 쪽으로..

예제1 다음을 구하여라.

(1) 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 이용하여 만들 수 있는 3자리 정수의 개수

(2) 정의역이 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 공역이 $\{a,\ b,\ c\}$인 함수의 개수

(3) 서로 다른 편지 4통을 서로 다른 우체통 3개에 넣는 방법의 수

(4) 후보 5명에게 유권자 10명이 기명투표하는 방법의 수

(5) 서로 다른 사탕 4개를 6명에게 나눠주는 방법의 수

(6) 5지선다 4문항의 답을 찍는 방법의 수

B03 | 같은 것이 있는 순열

개념1 같은 것의 개수의 순열만큼으로 나눠준다.

eg1) a, a, b, c를 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

eg2) a, a, a, b, c를 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

eg3) a, a, a, b, b, c를 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

예제1 1, 2, 2, 4, 5, 5로 여섯 자리의 자연수를 만들 때,

300000보다 큰 것의 개수를 구하여라.

예제2 0, 1, 1, 2, 2, 3으로 여섯 자리의 자연수를 만들 때,

홀수의 개수를 구하여라.

예제3 1, 1, 2, 2, 3, 4로 여섯 자리의 자연수를 만들 때,

1이 이웃하는 경우의 수를 구하여라.

B03E1 | 최단 경로의 수

개념1 최단 경로의 수를 푸는 방법

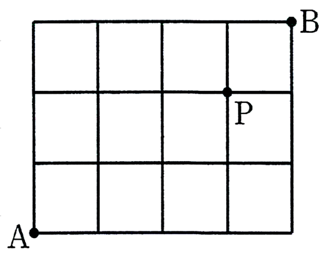
① 같은 것이 있는 순열로

② 각 점까지 이를 수 있는 최단거리를 더해나가면서

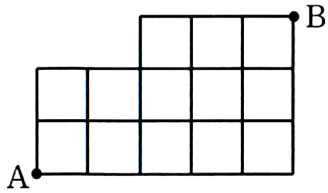
예제1 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A에서 B로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.

(1) P를 밟고

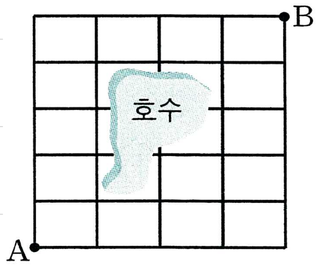
(2) P를 밟지 않고



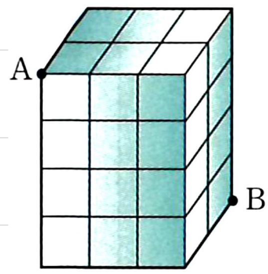
예제2 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A에서 B로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



예제3 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 A에서 B로 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



예제4 오른쪽 그림과 같이 정육면체 24개를 쌓아올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 가는 최단 경로의 수를 구하여라.



B03E2 | 순서가 정해진 배열

개념1 순서가 정해져 있는 것들은 같은 것으로 취급한다.

예제1 다음을 만족시키면서 a, b, c, d, e를 일렬로 배열하는 방법의 수를 구하여라.

(1) a가 e보다 앞쪽에 나타나도록

(2) a, c, e가 a, c, e의 순서대로 나타나도록

(3) a가 e보다 앞쪽에, b가 d보다 앞쪽에 나타나도록

B04 | 중복조합

개념1 서로 다른 n개 중 중복을 허락하여 r개를 뽑는 방법을 ${}_n\mathrm{H}_r$이라 나타낸다.

$\Rightarrow$ ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

eg1) 네 문자 A, B, C, D 중 중복을 허락하여 2개를 고르는 방법의 수?

eg2) 네 문자 A, B, C, D 중 중복을 허락하여 3개를 고르는 방법의 수?

eg3) 두 문자 A, B 중 중복을 허락하여 5개를 고르는 방법의 수?

✓

	중복불가	중복허락
순서 O	${}_n\mathrm{P}_r$	${}_n\Pi_r$
순서 X	${}_n\mathrm{C}_r$	${}_n\mathrm{H}_r$

개념2 $a+b+c+\cdots+n=r$의 0 이상 정수해의 쌍의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

※ 정의보다 적용하기 쉬우므로 이쪽을 정의처럼 기억해두도록 하자.

예제1 다음을 구하여라.

(1) 과일가게에서 사과, 배, 감, 망고를 합쳐서 10개를 구입하는 경우의 수

(2) 서로 구별할 수 없는 7개의 음료수를 3명에게 나눠주는 경우의 수

(3) 5명의 후보에게 20명의 유권자가 무기명 투표하는 경우의 수

(4) $(a+b+c)^7$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수

예제2 서로 구별할 수 없는 공 8개를 서로 다른 상자 3개에 넣는 경우의 수를 구하여라. (단, 빈 상자가 있을 수 있다.)

※ 공들이 서로 달라서 서로 구별할 수 있을 때의 경우의 수를 구하여라.

B04E1 | 조건이 걸린 부정방정식

✓ 음이 아닌 정수 (0 이상 정수)로 맞춰준다.

예제1 방정식 $a+b+c=10$에 대하여, 다음을 구하여라.

(1) 0 이상 정수해의 쌍

(2) 자연수해의 쌍

(3) $a \geq 2,\ b \geq 1,\ c \geq 2$인 정수해의 쌍

예제2 서로 구별할 수 없는 7개의 음료수를 네 명에게 나눠줄 때,

(1) 각 사람이 적어도 하나씩 받도록 나눠주는 방법의 수를 구하여라.

(2) A가 2개 이상 받도록 나눠주는 방법의 수를 구하여라.

예제3 $(a+b+c)^6$의 전개식의 항들 중에서 a를 포함한 항의 개수는 몇 개인지 구하여라.

B04E2 | 함수의 개수

개념1 $n(X)=r$, $n(Y)=n$일 때,

① $f:X\to Y$인 f의 개수는 ${}_n\Pi_r$이다.

② $f:X\to Y$인 일대일함수 f의 개수는 ${}_n\mathrm{P}_r$이다.

③ $f:X\to Y$, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$인 f의 개수는 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.

④ $f:X\to Y$, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$인 f의 개수는 ${}_n\mathrm{H}_r$이다.

예제1 다음을 구하여라.

(1) $1\le a<b<c\le 7$인 정수 $(a,\ b,\ c)$쌍의 개수

(2) $1\le a\le b\le c\le 7$인 정수 $(a,\ b,\ c)$쌍의 개수

✓ 부등호가 있다가 없다가 하는 경우의 풀이

eg) $1\le a<b\le c<d\le 8$을 만족시키는 정수해 쌍의 개수를 구하여라.

예제2 $X=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 7\}$일 때, 함수 $f:X\to Y$가 조건

'$x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.'와 다음 조건을 각각 만족시키는 f의 개수는?

(1) $f(2)=4$

(2) 치역의 원소 중 최소인 것이 2, 최대인 것이 6이다.

(3) 치역의 원소의 개수가 3이다.

B05 | 이항정리의 뜻

탐구 다음을 전개하여 보자.

$(a+b)^2,\qquad (a+b)^3,\qquad (a+b)^4,\qquad \cdots$

개념1 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}$

개념2 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k$

예제1 다음을 전개하여라.

(1) $(a+b)^5$

(2) $(x^2-2)^4$

(3) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^4$

예제2 다음을 간단히 하여라.

(1) $\sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k 2^k 3^{10-k}$

(2) $\sum_{k=0}^{12} {}_{12}\mathrm{C}_k \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10-k}$

(3) $\sum_{k=0}^{8} {}_8\mathrm{C}_k 2^k$

B06 | 특정항의 계수

개념1 $(a+b)^n$의 전개식에서 $a^k b^{n-k}$의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_k$이다.

예제1 다음을 구하여라.

(1) $(2x-3)^5$의 전개식에서 x^2의 계수

(2) $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수

(3) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수

(4) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항

(5) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^2의 계수

예제2 다음을 구하여라.

(1) $(x+1)^5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$의 전개식에서 x^2의 계수

(2) $(x+1)^5(x^2+1)$의 전개식에서 x^5의 계수

(3) $(x+1)^5(x+2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수

(4) $(x+1)^4(x^2+x)^4$의 전개식에서 x^8의 계수

✓ 계수들의 합 : $x=1$, $x=-1$, $x=i$ 같은 거 넣어본다.

eg1) $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 계수의 합이 3^6일 때, a의 값은?

eg2) $(1-x+x^2)^n$의 전개식에서 x^k의 계수를 a_k라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}$의 값?

B06E1 | 다항정리

개념1 $(a+b+c)^n$의 전개식에서 $a^p b^q c^r$의 계수는 $\dfrac{n!}{p!q!r!}$이다.

※ 교과서에 없지만 꽤 자주 보이는 문제이다.

예제1 $(a+b+c)^7$의 전개식에서 다음 항의 계수를 구하여라.

(1) $a^2b^3c^2$　　(2) a^3bc^3

(3) b^4c^3　　(4) a^7

예제2 다음을 구하여라.

(1) $(2a-b+c)^5$의 a^2bc^2의 계수

(2) $(x^2+x+1)^5$의 x^4의 계수

(3) $\left(x^2+1+\dfrac{1}{x}\right)^4$의 상수항

cf1) $(a+b+c)^{10}$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

cf2) 서로 다른 7개의 공을 A, B, C에게 다음과 같이 나눠주는 방법의 수는?

(1) 2개, 2개, 3개의 세 묶음으로 나누어 3명에게 나눠준다.

(2) A에게 2개, B에게 2개, C에게 3개를 나눠준다.

B07 | 이항계수의 성질

개념1 이 정도는 외워줘야 하는 것들

① ${}_{n}\mathrm{C}_{0}={}_{n}\mathrm{C}_{n}=1$

② ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$

③ ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

④ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n}$

⑤ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{4}+\cdots={}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{3}+{}_{n}\mathrm{C}_{5}+\cdots=2^{n-1}$

⑥ 하키스틱

※ 위 공식들을 파스칼의 삼각형에서 확인해 보자.

예제1 다음을 구하여라.

(1) ${}_{19}\mathrm{C}_{0}+{}_{19}\mathrm{C}_{1}+{}_{19}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{19}$

(2) ${}_{19}\mathrm{C}_{1}+{}_{19}\mathrm{C}_{3}+{}_{19}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{19}$

(3) ${}_{19}\mathrm{C}_{0}+{}_{19}\mathrm{C}_{1}+{}_{19}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{19}\mathrm{C}_{9}$

(4) ${}_{2}\mathrm{C}_{2}+{}_{3}\mathrm{C}_{2}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{2}$

(5) ${}_{2}\mathrm{C}_{0}+{}_{3}\mathrm{C}_{1}+{}_{4}\mathrm{C}_{2}+{}_{5}\mathrm{C}_{3}+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{8}$

B07E1 | 중요하지 않은 이항계수의 성질

개념1 별로 안 중요한데, 가끔 보이는 공식들

⑦ ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+2{}_{n}\mathrm{C}_{2}+3{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+n{}_{n}\mathrm{C}_{n}=n\cdot 2^{n-1}$ (미분해서)

⑧ ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}+\cdots+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (적분해서)

⑨ $(1+x)^{n}$에 $x=i$를 대입해서 나오는 식들

예제1 다음을 구하여라.

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_{1}+2{}_{10}\mathrm{C}_{2}+3{}_{10}\mathrm{C}_{3}+\cdots+10{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

(2) $2{}_{10}\mathrm{C}_{1}+2^{2}{}_{10}\mathrm{C}_{2}+2^{3}{}_{10}\mathrm{C}_{3}+\cdots+2^{10}{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

(3) $\sum_{k=0}^{8}(k-2){}_{8}\mathrm{C}_{k}$

(4) ${}_{16}\mathrm{C}_{0}-{}_{16}\mathrm{C}_{2}+{}_{16}\mathrm{C}_{4}-{}_{16}\mathrm{C}_{6}+\cdots+{}_{16}\mathrm{C}_{16}$

(5) ${}_{21}\mathrm{C}_{0}-{}_{21}\mathrm{C}_{2}+{}_{21}\mathrm{C}_{4}-{}_{21}\mathrm{C}_{6}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{20}$

(6) ${}_{21}\mathrm{C}_{1}-{}_{21}\mathrm{C}_{3}+{}_{21}\mathrm{C}_{5}-{}_{21}\mathrm{C}_{7}+\cdots+{}_{21}\mathrm{C}_{21}$

개념2 수능에는 안 나오지만 원래 중요한 공식 : $k\cdot{}_{n}\mathrm{C}_{k}=n\cdot{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$

예제2 다음을 구하여라.

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_{1}+2{}_{10}\mathrm{C}_{2}+3{}_{10}\mathrm{C}_{3}+\cdots+10{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

(2) ${}_{10}\mathrm{C}_{1}+2^{2}{}_{10}\mathrm{C}_{2}+3^{2}{}_{10}\mathrm{C}_{3}+\cdots+10^{2}{}_{10}\mathrm{C}_{10}$