

[P]

PatterN DriLL
수능 빈출 유형 분석
정적분의 연산

5A ACADEMY
SOOHAN

**[정적분으로 정의된 함수]**

▷ $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 이면,

- ① $g'(x) = f(x)$
- ② $g(a) = 0$

이다.

※ 대부분의 경우에 $y = g(x)$ 의 그래프로 접근한다.
(곡선 $y = f(x)$ 의 넓이로 다루지 않는다.)

001. [2016학년도 9월(A형) 25번]

함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \int_0^x (2at+1)dt$$

이고 $f'(2) = 17$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.¹⁾

002. [2013학년도 수능(나형) 21번]

삼차함수 $f(x) = x^3 - 3x + a$ 에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a 의 최솟값은?²⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

003. [2021학년도 9월(나형) 28번]

함수 $f(x) = -x^2 - 4x + a$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최솟값을 구하여라.³⁾



[정적분으로 정의된 함수의 x축]

▷ $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 이면, $g(a) = 0$ 이다.
 ⇒ 곡선 $y = g(x)$ 는 점 $(a, 0)$ 을 지난다.

004. [한성은 MP0198번]

함수

$$f(x) = \int_u^x t(t-a)(t-b)dt$$

는 $x=1$ 에서 극대, $x=3$ 에서 극소이다. 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 u 의 개수는 c 이다. $a+b+c$ 의 값은?⁴⁾

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

005. [2022학년도 6월 20번]

실수 a 와 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 3$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_a^x \{f(x) - f(t)\} \times \{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a 의 값의 합을 구하여라.⁵⁾



[정적분을 포함한 항등식]

- ▷ $\int_a^b f(t)dt$ 가 있으면
 $k = \int_a^b f(t)dt$ 라 두고 이 식을 푼다.
- ▷ $\int_a^x f(t)dt$ 가 있으면
 $x = a$ 를 대입하고 양 변을 미분한다.
- ▷ 다항식의 차수를 조사한다.

006. [2012년 7월 25번]

$f(x) = 3x^2 + x + \int_0^2 f(t)dt$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2)$ 의 값을 구하여라.⁶⁾

007. [2013학년도 7월(나형) 12번]

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 - 2x + \int_0^1 tf(t)dt$ 를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?⁷⁾

- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$
- ④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

008. [2017년 10월(나형) 9번]

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^3 + ax^2 - 3x + 1$$

을 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값은?⁸⁾ (단, a 는 상수이다.)

- ① -2 ② -1 ③ 0
- ④ 1 ⑤ 2

009. [2017년 경남 10월(나형) 15번]

다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$xf(x) = \int_{-1}^x \{f(t) + 2t^2 + t\}dt$$

일 때, $f(3)$ 의 값은?⁹⁾

- ① 10 ② 12 ③ 14
- ④ 16 ⑤ 18

**010.** [2014학년도 9월(A형) 28번]

다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x \int_0^1 f(t)dt$$

일 때, $f(0) = a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하여라.¹⁰⁾

011. [2014학년도 10월(나형) 24번]

모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_{12}^x f(t)dt = -x^3 + x^2 + \int_0^1 xf(t)dt$$

$\int_0^1 f(x)dx$ 의 값을 구하여라.¹¹⁾

012. [2020학년도 수능(나형) 28번]

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\} \text{이다.}$$

(나) $\int_0^2 f(x)dx = 5 \int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0) = 1$ 일 때, $f(4)$ 의 값을 구하여라.¹²⁾

**[도함수의 넓이]**

$$\triangleright \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) :$$

도함수 $y = f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
함수 $y = f(x)$ 의 변화량과 같다.

013. [2017년 대구 8월(나형) 20번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값, $x = 1$ 에서 극솟값을 가진다.
(나) 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근 $\alpha, \beta, \gamma (\alpha < \beta < \gamma)$ 를 가진다.

$g(x) = \int_{-1}^x |f'(t)|dt$ 라 할 때, $g(\gamma) - g(\alpha)$ 의 값은?13)

- ① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

014.

[한성은 EG1580번]

사차함수 $f(x) = x(x-2)(x-5)(x-8)$ 에 대하여

$$\int_m^{m+2} f'(x)dx < 0$$

를 만족시키는 모든 자연수 m 의 값의 합은?14)

**[도형의 넓이]**

▷ 차함수와 넓이 : 함수 $f(x) - g(x)$ 의 그래프를 그리고 넓이를 구할 수 있다.

▷ 다항함수와 넓이 :

$$\frac{|k|(\beta - \alpha)^3}{6}, \quad \frac{|k|(\beta - \alpha)^4}{12}$$

정도 외워 줘.

015. [2020학년도 수능(나형) 26번]

두 함수

$$f(x) = \frac{1}{3}x(4-x), \quad g(x) = |x-1| - 1$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값을 구하여라.¹⁵⁾

016. [2018학년도 수능(나형) 26번]

곡선 $y = -2x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.¹⁶⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

017. [2018년 대구 11월(나형) 26번]

두 곡선 $y = 2x^2 - 4x$ 와 $y = x^2 - 2x + 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.¹⁷⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

**[넓이의 변화율과 길이]**

▷ 넓이의 변화율 :
길이가 넓이의 변화율 각일 때가 있다.

018. [2023학년도 6월 20번]

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt$ 는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 극소이다.

$f(0)$ 의 값을 구하여라.¹⁸⁾

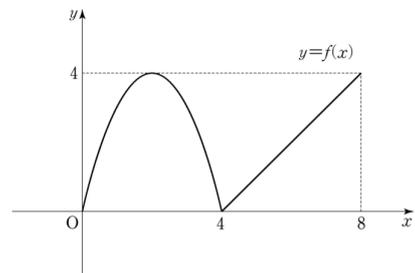
019. [2017학년도 9월(나형) 29번]

구간 $[0, 8]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-4) & (0 \leq x < 4) \\ x-4 & (4 \leq x \leq 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a(0 \leq a \leq 4)$ 에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x) dx$ 의

최솟값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라.¹⁹⁾ (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



**[평행이동/대칭이동과 적분]**

▷ 알아서 잘

020. [2016학년도 수능(A형) 20번]두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx = 10$$

일 때, $h(3)$ 의 값은? ²⁰⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

021. [2019학년도 수능(나형) 17번]실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x-3) + 4$ 이다.

(나) $\int_0^6 f(x)dx = 0$

함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? ²¹⁾

- ① 9 ② 12 ③ 15
 ④ 18 ⑤ 21

022. [2022학년도 수능 20번]실수 전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.(가) 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) = x$ 이다.(나) 어떤 상수 a, b 에 대하여 구간 $[0, \infty)$ 에서

$$f(x+1) - xf(x) = ax + b$$
이다.

 $60 \times \int_1^2 f(x)dx$ 의 값을 구하여라. ²²⁾



[연습문제]

023. [한성은 IY0568번]

실수 a 와 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_a^x (x-t)f(t)dt = x^4 - x^3 - x^2 + x$$

을 만족시킨다. $f(a)$ 의 값은?23)

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

024. [한성은 OB5187번]

다항함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_2^x tf(t)dt + g(x) = (x-1) \int_2^x f(t)dt$$

을 만족시킨다. $\int_1^2 f(t)dt = 7$ 일 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.24)

025. [2022학년도 9월 11번]

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)dt$ 일 때, $a + f(3)$ 의 값은?25)

(단, a 는 상수이다.)

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

026. [한성은 SR2605번]

다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_2^x tf(t)dt = \{f(x)\}^2$$

을 만족시킨다. $f(4)$ 의 값은?26)

- ① 3 ② 4 ③ 5
 ④ 6 ⑤ 7

**027.** [한성은 ID4109번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의
도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = \begin{cases} (x+3)(x+1) & (x \leq 0) \\ ax+b & (x > 0) \end{cases}$$

이고 $f(-3) = f(4)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?27)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

028. [한성은 C06488번]

$f(1) = 0$ 인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인
삼차함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) = (x-1)f(x) - \int_1^x f(t)dt$$

를 만족시킨다. 방정식 $g(x) = 0$ 가 오직 하나의 실근을
가질 때, $f(5)$ 의 값을 구하여라.28)

029. [2022학년도 6월 11번]

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$ 가
다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^2 g(x)dx$ 의 값은?29)

(가) $g(x) = \begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2) = g(x)$ 이다.

- ① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$



030. [수능 예시문항 12번]

$0 < a < b$ 인 모든 실수 a, b 에 대하여

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k) dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k 의 최솟값은?³⁰⁾

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

031. [한성은 UX9268번]

$0 \leq x$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{1}{4}x(x-2) + x$ 와

$f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여, 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \int_0^x \{g(t) - f(t)\} dt$$

라 하자. 함수 $h(x)$ 가 $x = a$ 에서 최댓값 M 을 가질 때, aM 의 값은?³¹⁾

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2
 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

032. [한성은 ZL4260번]

함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \quad (\alpha < \beta < \gamma)$$

이고

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 5, \quad \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = -27$$

를 만족시킨다. $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq \beta) \\ -f(x) & (x > \beta) \end{cases}$ 일 때,

함수 $\int_{\alpha}^x g(t) dt$ 의 극댓값은?³²⁾

- ① 22 ② 27 ③ 32
 ④ 37 ⑤ 42



033. [한성은 CF4944번]

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 를 각각

$$f(x) = kx^2(x-3) (k < 0),$$

$$g(x) = \int_a^x |f'(t)| dt + f(x)$$

라 하자. 방정식 $g(x)=0$ 가 두 개 이상의 실근을 갖고 곡선 $y=g(x)$ 가 점 $(-1, -4)$ 를 지난다. k 의 값은?33)

- ① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1
 ④ -2 ⑤ -4

034. [2017학년도 수능(나형) 20번]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$ 에서 극솟값을 가진다. (단, k 는 상수이다.)

(나) 1보다 큰 모든 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t |f'(x)| dx = f(t) + f(0)$$

이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?34)

ㄱ. $\int_0^k f'(x) dx < 0$

ㄴ. $0 < k \leq 1$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 0이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



035. [2019년 9월(나형) 21번]

사차함수 $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ 에 대하여 $x \geq 0$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_{-x}^{2x} \{f(t) - |f(t)|\} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $0 < x < 1$ 에서 $g(x) = c_1$ (c_1 는 상수)
- (나) $1 < x < 5$ 에서 $g(x)$ 는 감소한다.
- (다) $x > 5$ 에서 $g(x) = c_2$ (c_2 는 상수)

$f(\sqrt{2})$ 의 값은?³⁵⁾ (단, a, b 는 상수이다.)

- ① 40
- ② 42
- ③ 44
- ④ 46
- ⑤ 48

036. [2021년 수능(나형) 20번]

실수 $a(a > 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은?³⁶⁾

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$
- ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$
- ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- ④ $\sqrt{6}$
- ⑤ $2\sqrt{2}$

- 1) 4
- 2) ②
- 3) 5
- 4) ④

$$\{a, b\} = \{1, 3\}, c = 6$$

- 5) 8
- 6) 4
- 7) ①
- 8) ⑤
- 9) ②
- 10) 40
- 11) 132
- 12) 7
- 13) ②
- 14) 12
- 15) 14
- 16) 4
- 17) 35
- 18) 13
- 19) 43
- 20) ①
- 21) ④
- 22) 110
- 23) ②

$$f(x) = 12x^2 - 6x - 2, a = 1$$

- 24) 20

$$g(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 20$$

$$f(x) = 6x - 2$$

- 25) ④
- 26) ①

차수를 비교해보면 $f(x)$ 는 이차함수이다.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 놓고 삼절하면 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 이다.

- 27) ③
- 28) 24

$$g(x) = (x-1)^3, f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2$$

- 29) ②
- 30) ②
- 31) ②

$$a = 2, M = \frac{2}{3}$$

- 32) ④
- 33) ②
- 34) ⑤
- 35) ④
- 36) ④