[P]

PatterN DriLL

수능 빈출 유형 분석

삼차함수의 성질

5A ACADEMY

SOOHAN

[삼차함수의 개형]

▷ 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) \le 0$일 때,
$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가(또는 감소)한다.

001. [2012학년도 9월(나형) 18번]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은?[1)]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

002. [2012학년도 6월(나형) 15번]

삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?[2)]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

003. [2018학년도 9월(나형) 20번]

삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3)]

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

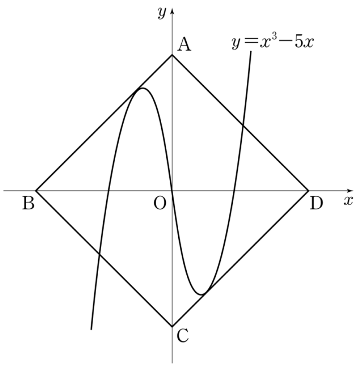
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[삼차함수의 대칭성]

▷ 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f''(a)=0$이면
곡선 $y=f(x)$는 점 $(a,\ f(a))$에 대하여 대칭이다.

004. [2012년 5월(나형) 30번]

그림과 같이 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프에 접할 때, 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하여라.4)



005. [2014학년도 6월(A형) 17번]

곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다. 점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은?5)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

006. [2008학년도 6월 20번]

양수 a에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하여라.6)

[다항식과 인수]

▷ 다항식 $f(x)$가
$(x-a)$, $(x-a)^2$, $(x-a)^3$
을 인수로 가질 때, 곡선 $y=f(x)$의 모양.

007. [한성은 QL5272번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=9$의 세 실근 0, 2, 5를 갖는다. $f'(5)$의 값을 구하여라.7)

008. [한성은 WN7755번]

$f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=(x-5)f(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$의 최솟값은 0이다. (나) 함수 $g(x)$의 극댓값은 4이다.

$f(7)$의 값을 구하여라.8)

009. [2016학년도 6월(A형) 21번]

자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

> (가) $f(n)=0$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?9)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

010. [한성은 OM3768번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(2)=0$
> (나) 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(4)$의 값을 구하여라.10)

[절편과 비율관계1]

▷ 삼차함수 $f(x)$와 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여
$f(a)=0,\quad f(b)=0,\quad f'(b)=0$
이면 함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{2a+b}{3}$에서 극값을 가진다.

011. [2011학년도 수능 18번]

함수 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+a$의 극솟값이 10일 때, 상수 a의 값을 구하여라.11)

012. [2016년 경남 10월(나형) 21번]

최고차항의 계수가 양수이고, $f(1)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_1^x f(t)dt$$

라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(2)=-6$
(나) 방정식 $|g(x)|=-g(3)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$g(-1)$의 값은?12)

① -68 ② -66 ③ -64
④ -62 ⑤ -60

[절편과 비율관계2]

▷ **변곡점이 원점인 삼차함수** $f(x)$**에 대하여**
함수 $f(x)$**가 극대/극소가 되는** x**값을** $\pm a$,
0이 아닌 곡선 $y=f(x)$**의** x**절편을** $\pm b$**라 할 때,**
$|a|:|b|=1:\sqrt{3}$ **이다.**

013. [한성은 QD9656번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
방정식 $f(x)=k$의 세 실근이 0, 3, 6이고, 함수 $f(x)$가
극솟값 0을 갖는다. 함수 $f(x)$의 극댓값은?13)

① $4\sqrt{3}$ ② $8\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $20\sqrt{3}$

014. [2012학년도 수능(나형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에
대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의
서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?14)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

015. [2012년 10월(나형) 29번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을
만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하여라.15)

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

[접선과 비율관계]

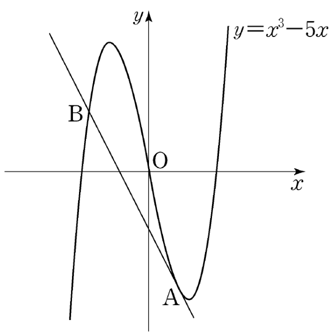
▷ 차함수에서 비율관계1을 때리자.

016. [2014학년도 9월(A형) 27번]

곡선 $y=x^3+2x+7$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ 4)$에서의 접선이 점 P가 아닌 점 $(a,\ b)$에서 곡선과 만난다. $a+b$의 값을 구하여라.16)

017. [2013학년도 6월(나형) 17번]

곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는?17)



① $\sqrt{30}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

018. [2017학년도 9월(나형) 20번]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?18)

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ f(-1))$에서의 접선은 점 $(2,\ f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

019. [2020학년도 수능 30번 변형]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가
다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식이 $y=x$이다.
> (나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=1$일 때, $f(3)$의 값을 구하여라.[19]

020. [한성은 ZF7956번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{4}$이고 $f(0)=0$, $f'(0)>1$인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x+t$가 있다. 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $t=0$, $t=8$에서 불연속이다. $f(8)$의 값을 구하여라.[20]

[극대극소의 차이]

▷ **최고차항의 계수가 a인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극댓값, $x=\beta$에서 극솟값을 가질 때,**

$$f(\alpha)-f(\beta)=\left|\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3\right|$$

이다.

021. [한성은 UU9825번]

$x=0$에서 극댓값을 가지는 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(3)=18$
(나) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는 8이다.

$f(4)-f(0)$의 값을 구하여라.21)

022. [2019년 10월(나형) 16번]

삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 α, β는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\alpha-\beta|=10$
(나) 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$ 사이의 거리는 26이다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는?22)

① $12\sqrt{2}$　② 18　③ 24
④ 30　⑤ $24\sqrt{2}$

023. [2019년 10월(나형) 27번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하여라.23)

(가) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{x}=0$

(나) 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 2이다.

024. [한성은 TI6387번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)+\alpha=f(\beta)+\beta$

(나) $f'(0)=f'(4\alpha)$

$f'(4\alpha)$의 값은?24)

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[변곡점에서의 접선]

▷ 접선이 몇 개 그어지는가 등.
※ 변곡점은 기울기가 극대(또는 극소)가 되는 점이다.

025. [2012학년도 수능 19번]

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?25)

① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

026. [2013학년도 6월 21번]

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은?26)

① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

[사차함수]

▷ 함수 $(x-a)^3(x-b)$는 $\frac{a+3b}{4}$에서 극값을 갖는다.

▷ 함수 $(x+a)x^2(x-a)$는 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$에서 극값을 갖는다. 써본 적은 없다.

027. [한성은 DL3822번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{12}$인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)-f(a)|$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 오직 $x=b$에서만 미분가능하지 않다.
(나) 방정식 $g(x)=36$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$|b-a|$의 값은?27)

① 4 ② 6 ③ 8
④ 12 ⑤ 16

028. [한성은 BK0523번]

$f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\int_{-2}^{x}f(t)dt$$

이다. 함수 $|g(x)|$가 오직 $x=-2$에서만 미분가능하지 않을 때, $f(4)$의 값은 a 또는 b이다. $a+b$의 값을 구하여라.28)

[연습문제]

029. [2019년 10월(나형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 α, $\beta(\alpha<\beta)$뿐이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 극솟값은 -4이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?29)

> ㄱ. $f'(\alpha)=0$
> ㄴ. $\beta=\alpha+3$
> ㄷ. $f(0)=16$이면 $\alpha^2+\beta^2=18$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

030. [2020학년도 6월(나형) 18번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작을 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?30)

> ㄱ. $g(0)+g'(0)=\frac{1}{2}$
> ㄴ. $g(1)<\frac{3}{2}$
> ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0일 때, $g(2)=\frac{5}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

031. [수능 예시문항 9번]

원점을 지나고 곡선 $y=-x^3-x^2+x$에 접하는 모든 직선의 기울기의 합은?31)

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

032. [2015년 10월(나형) 29번]

함수 $f(x)=x^3+3x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하여라.32)

(가) 점 $(-4,\ a)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개 있다.
(나) 세 접선의 기울기의 곱은 음수이다.

033. [2018학년도 6월(나형) 20번]

함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1\ (k>0\text{인 상수})$$

의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선 l, m의 기울기가 모두 $3k^2$이다. 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 두 직선과 접선 l, m으로 둘러싸인 도형의 넓이가 24일 때, k의 값은?33)

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1) ①
2) ④
3) ③
4) 32
5) ②
6) 20
7) 15
8) 18
9) ③
10) 8
11) 14
12) ⑤
13) ③
14) ④
15) 4
16) 21
17) ④
18) ⑤
19) 51
20) 16

곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=x$와 $y=x+8$에 모두 접해야 한다.
곡선 $y=f(x)$과 직선 $y=x+8$의 접점의 x좌표를 α라 하면
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 접점의 x좌표는 3α다.
$f(x)-x=\frac{1}{4}x(x-3\alpha)^2$이고 $f(\alpha)=\alpha+8$이므로 $\alpha=2$이다.

21) 32

$f'(x)=ax(x-\alpha)$라 하자. $\left|\frac{a}{6}\alpha^3\right|=8$이고 $3a(3-\alpha)=18$이다.
$\alpha<0$인 경우에는 '$x=0$에서 극대'와 '$f'(3)>0$'을 동시에
만족할 수 없다. $\frac{a}{6}\alpha^3=8$이다.
연립하여 풀면 $a=6$, $\alpha=2$이다. $f(4)-f(0)=\int_0^4 6x(x-2)dx$.

22) ③
23) 19
24) ⑤

(가)에서 $\beta-\alpha=|f(\alpha)-f(\beta)|$이므로 $\frac{\frac{1}{2}}{2}|\beta-\alpha|^3=\beta-\alpha$이다.
따라서 $\beta-\alpha=2$이다.
(나)에서 $f'(x)$는 $x=2\alpha$에서 극값을 가진다. 대충 봐도
$\alpha=1$, $f'(x)=\frac{3}{2}(x-1)(x-3)$이고 $f'(4\alpha)=f'(4)=\frac{9}{2}$이다.

25) ④
26) ②
27) ③

함수를 x축의 방향으로 평행이동시켜도 답에 영향을 주지 않는다.
$a=0$, $b=4\beta$라 두면 $f(x)=\frac{1}{12}x^3(x-4\beta)$이고
$f(3\beta)=-36$이므로 $\beta=2$이다.

28) 220

$f(x)$는 $(x+1)(x-2)^2$ 또는 $(x-2)(x-14)^2$이다.

29) ②
30) ⑤
31) ②
32) 9
33) ③