

[P]

PatterN DriLL
수능 빈출 유형 분석
다항식 분의 다항식

5A ACADEMY
SOOHAN



[최고차항]

- ▷ $x \rightarrow \infty$ 일 때는 최고차항에 대한 정보가 담긴다.
- ▷ $x \rightarrow -\infty$ 일 때는 $x = -t$ 로 치환한다든가, $\sqrt{f(x)}$ 보이면 유리화 등 극한 다루는 기본.
- ▷ 다항함수의 최고차항을 설정해야 하는 문항.
 $\Rightarrow f(x) = ax^n + \dots$ 라 하자.

001. [2015학년도 6월(A형) 29번]

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -11, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{x}\right)$ 의 값을 구하여라.¹⁾

002.

[한성은 VY6698번]

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{f(x)} - x^2}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.²⁾

[TIP1] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{f(x)} - x^2}{x} = 3$ 에서

$$f(x) = x^4 + 6x^3 \dots \text{이다.}$$

003.

[2011학년도 6월 23번]

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$ 가

다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값을 구하여라.³⁾

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 4$

[TIP1] 최고차항 설정

폴이의 첫 줄) $f(x) = ax^n + \dots$ 라 하자.



[인수와 미분계수]

▷ 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-b}{x-a} = c$ 이면

- ① $f(a) = b, f'(a) = c$ 이다.
- ② $f(x) = (x-a)g(x) + b$ 이다. (다항함수 $g(x)$)

▷ 대충 각이 이상하면 0(인수)이 필요하다.

004. [2020학년도 9월(나형) 16번]

다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$$

를 만족시킨다. $f(1) \leq 12$ 일 때, $f(2)$ 의 최댓값은?4)

- ① 27 ② 30 ③ 33
- ④ 36 ⑤ 39

005. [2017학년도 수능(나형) 18번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha - \beta|$ 의 값은?5) (단, a 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5



[제공 인수]

▷ 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = 0$ 이면
 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 $f(x) = (x-a)^2 g(x)$ 이다.
 ※ 미분계수로 풀려면 이계도함수가 필요하다.

006. [2017학년도 8월(나형) 19번]

삼차함수 $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(0)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.)

(가) $g(-1) = 0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{3}$

- ① 3 ② 4 ③ 5
- ④ 6 ⑤ 7

007. [2019학년도 10월(나형) 30번]

양수 a 에 대하여 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = g(0)$
 (나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = 0$
 (다) $\int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx = 36$

$3 \int_0^a |f(x) - g(x)| dx$ 의 값을 구하여라. (7)



[최저차항]

▷ 다항함수 $f(x)$ 에 대하여,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a \text{ 이면 } f(x) = \dots + ax \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = a \text{ 이면 } f(x) = \dots + ax^n \text{ 이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = b \text{ 이면 } f(x) = (x-a)^n (\dots + b) \text{ 이다.}$$

▷ 대충 각이 이상하면 0(인수)이 필요하다.

008. [2018학년도 9월(나형) 12번]

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$f(2)$ 의 값은?⁸⁾

- ① 11 ② 14 ③ 17
- ④ 20 ⑤ 23

009. [2020학년도 6월(나형) 20번]

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값은?⁹⁾

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4 \text{ 인}$$

자연수 n 이 존재한다.

- ① 12 ② 13 ③ 14
- ④ 15 ⑤ 16

010. [2009학년도 수능 11번]

다항함수 $f(x)$ 와 두 자연수 m, n 이

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = b, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?¹⁰⁾ (단, a, b 는 실수이다.)

- ㄱ. $m \geq n$
- ㄴ. $ab \geq 9$
- ㄷ. $f(x)$ 가 삼차함수이면 $am = bn$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[치환/로피탈]

- ▷ $f(\star)$ 에서 \star 을 치환한다.
- ▷ 로피탈은 각자 취함에 따라.
치환 대신 쓸 때 꿀일 수 있다.

011. [2013학년도 6월(나형) 9번]

함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-2x} = 4$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값은?11)

- ① 2 ② 4 ③ 6
- ④ 8 ⑤ 10

012. [2014학년도 6월 6번]

다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)} = 2$ 를

만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$ 의 값은?12)

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



[연습문제]

013. [2021학년도 수능(나형) 17번]

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)} = 2$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(0)$ 의 값은?¹³⁾

- ① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

014. [한성은 MT7302번]

$f'(2) = 3$ 인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x}{f(x) - x} = 2 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x}{f(x) - x} = -1 \end{aligned}$$

$f(4)$ 의 값을 구하여라.¹⁴⁾

015. [2015학년도 6월(A형) 21번]

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & g(1) = 0 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

$g(5)$ 의 값은?¹⁵⁾

- ① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

016. [한성은 XS3344번]

최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow n} f(x)g(x) = 0 \quad (n = 1, 2) \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow n} \frac{g(x)}{f(x)} = 2n \quad (n = 1, 2) \end{aligned}$$

$g(6)$ 의 값을 구하여라.¹⁶⁾

**017.** [한성은 VQ3398번]

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$f(2)$ 의 값을 구하여라.¹⁷⁾

018. [한성은 IE7396번]

다항함수 $f(x)$ 와 자연수 n 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{n+1} + 1} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4$$

$f'(1) = 20$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.¹⁸⁾

019. [한성은 KH9105번]

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 는

다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{g(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow \infty} \{x \times g(x)\} = 2$$

$f(2)$ 의 값을 구하여라.¹⁹⁾

020. [2020학년도 수능(나형) 14번]

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 최댓값은?²⁰⁾

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$$

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12



021. [2018학년도 수능(나형) 18번]

최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?21)

- ① 4 ② 6 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

022. [한성은 WG2742번]

삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)+f(x)} = \frac{1}{2}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-x}{x-2} = 3$$

$f(3)$ 의 값은?22)

- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

023. [한성은 ZL0553번]

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값은?23)

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{g(x)\}^2}{(x-2)f(x)} = \frac{9}{2}$$

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 12

024. [한성은 UT0719번]

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가지고 모든 실수 α 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\{f(x)\}^2}{(x-1)f(8-x)}$$

이 존재한다. $f(2)=5$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?24)

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 12

- 1) 10
- 2) 80
- 3) 19
- 4) ③
- 5) ④
- 6) ①
- 7) 340
- 8) ②
- 9) ③
- 10) ⑤
- 11) ④
- 12) ①
- 13) ①
- 14) 36

$$\frac{3}{2}x(x-1)(x-2)$$

- 15) ⑤
- 16) 40

$$f(x) = (x-1)(x-2)\left(x - \frac{5}{2}\right), \quad g(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$$

- 17) 32

$f(x) = ax^n + \dots$ 라 하자. (가)에서 $2n = n + 3$ 이고 $(a-1) = 2$ 이다.

(나)에서 $f(x) = \dots + 2x^2$ 이다. 따라서 $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ 이다.

- 18) 64

(가)에서 $f(x) = 2x^n + \dots$, (나)에서 $f(x) = \dots + 4x^n$ 이다.

$f(x) = 2x^{n+1} + 4x^n$ 이고 $f'(1) = 20$ 에서 $n = 3$ 이다.

- 19) 36

(가)에서 $f(x) = x^4 + 4x^2 + \dots$, (나)에서 $f(x) = \dots + 2x$ 이다.

따라서 $f(x) = x^4 + 4x^2 + 2x$ 이다.

- 20) ③
- 21) ④
- 22) ②

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

\Rightarrow (가)에서 $f(x) = a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + (x-1)$ 이다.

- 23) ②

(가)에서 $f(x)g(x) = 2x^3 + \dots$ 이다.

(나)에서 $x \rightarrow 2$ 이면 분모가 0으로 수렴하므로 $g(2) = 0$ 이다.

$\{g(x)\}^2 = (x-2)^2(\dots)$ 에서 분자가 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는데, 수렴값이 0이 아니므로 $f(2) = 0$ 이다.

여기서부터 빠치는데, 네 가지 케이스가 가능하다.

Case1) $f(x) = x-2, \quad g(x) = (x-2)(2x-\alpha)$

Case2) $f(x) = 2(x-2), \quad g(x) = (x-2)(x-\alpha)$

Case3) $f(x) = (x-2)(x-\alpha), \quad g(x) = 2(x-2)$

Case4) $f(x) = (x-2)(2x-\alpha), \quad g(x) = x-2$

수렴값 $\frac{9}{2}$ 를 가지는 것은 딱봐도 두 번째 케이스.

- 24) ②

$\alpha = 1$ 일 때도 극한값이 존재해야 하므로 $f(1) = 0$ 이다.

따라서 $\alpha = 7$ 일 때 분모가 0으로 수렴한다. $f(7) = 0$ 이다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 1, 7이 아닌 근이 4가 아닌 수 r 이면

$\alpha = 8-r$ 일 때 극한값이 존재하지 않는다. $r = 4$ 이므로

$$f(x) = k(x-1)(x-4)(x-7)$$

이다.