[P]

PatterN DriLL

수능 빈출 유형 분석

수열의 귀납적 정의

5A ACADEMY

SOOHAN

[점화식의 적용]

▷ 점화식을 받으면 일단 좀 나열해본다.
뇌를 소유하고 있는지를 테스트 당하는 느낌.

▷ 등차수열, 등비수열의 점화식 확인.
$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$라든가.

001. [2019학년도 수능(나형) 13번]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2-3a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 1+a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{40} a_n$의 값은?1)

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

002. [2018학년도 수능(나형) 13번]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_7의 값은?2)

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

003. [2017학년도 6월(나형) 20번]

첫째항이 a인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2 & (n\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1 & (n\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$일 때, a의 값은?3)

① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

004. [2019학년도 9월(나형) 11번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_na_{n+1}=2n$$

이고 $a_3=1$일 때, a_2+a_5의 값은?4)

① $\frac{13}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{19}{3}$
④ $\frac{22}{3}$ ⑤ $\frac{25}{3}$

[합의 수열]

▷ $n \geq 2$이 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$

005. [2021학년도 6월(나형) 28번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.5) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

006. [2021학년도 9월 27번]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{n+3} - S_n = 13 \times 3^{n-1}$$

일 때, a_4의 값을 구하여라.6)

[등차수열의 합(이차식)]

▷ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ 꼴, $a_{n+1}=f(n)a_n$ 꼴만 해줘.

007. [2011학년도 9월 23번]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고,

$$a_{n+1}=a_n+(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\quad(n\geq1)$$

을 만족시킨다. $a_{20}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.7)

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

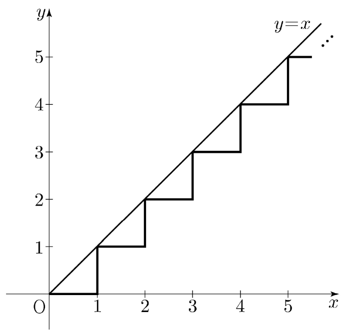
008. [2019학년도 9월(나형) 29번]

좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

(i) A_0은 원점이다.

(ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\frac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\frac{4}{25},\ 0\right)$, $\left(1,\ \frac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하여라.8)



009. [2018학년도 6월(나형) 29번]

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 수열 $\{b_n\}$은

$$b_1 = a_1$$

이고, 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} b_{n-1} + a_n & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1} - a_n & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다. $b_{10} = a_{10}$일 때, $\dfrac{b_8}{b_{10}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.9) (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

010. [2018학년도 9월(나형) 19번]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$, $b_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2, \quad b_{n+1} = a_n - b_n + n$$

을 만족시킨다. $b_{20} = 14$일 때, k의 값은?10)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

[선택형 점화식]

▷ 알아서 잘. 15번 유력 휴보.

011. [2021학년도 9월(나형) 21번]

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?11)

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

012. [수능 예시문항 15번]

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?12)

(가) $a_5=5$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-6 & (a_n \ge 0) \\ -2a_n+3 & (a_n < 0)\end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

[수학적 귀납법]

▷ 증명 원리 확인. 역사적으로 [빈 칸 추론]과 관련 깊지만 지금은 사양산업이다.

013. [2011학년도 6월 13번]

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\alpha(\alpha\neq 0)$이고, 모든 $n(n\geq 2)$에 대하여 $(n-1)a_n+\sum_{m=1}^{n-1} ma_m=0$을 만족시킨다. 다음은

$$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha\ (n\geq 1)$$

임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때, $a_1=\alpha=\frac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!}\alpha$이다.

(2) ⅰ) $n=2$일 때, $a_2+a_1=0$이므로

$a_2=-a_1=\frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!}\alpha$이다.

따라서 주어진 식이 성립한다.

ⅱ) $n=k(k\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k} ma_m$$
$$=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1} ma_m+ka_k$$
$=ka_{k+1}+(\boxed{(가)})\times a_k+ka_k$이므로

$a_{k+1}=\boxed{(나)}\times a_k=\frac{(-1)^k}{k!}\alpha$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$라 할 때, $f(10)$의 값은?13)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

014. [2008학년도 수능 11번]

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(n^2+1)\cdot n!=n\cdot(n+1)!$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=2$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots+(k^2+1)\cdot k!$
$=k\cdot(k+1)!$

이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$(1^2+1)\cdot 1!+(2^2+1)\cdot 2!+\cdots$
$+(k^2+1)\cdot k!+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$
$=\boxed{(가)}+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$
$=(\boxed{(나)})\cdot(k+1)!=(k+1)\cdot\boxed{(다)}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?14)

	(가)	(나)	(다)
①	$k\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$
②	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
③	$k\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+1)!$
④	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+3k+2	$(k+2)!$
⑤	$(k+1)\cdot(k+1)!$	k^2+2k+1	$(k+1)!$

[연습문제]

015. [2020학년도 9월(나형) 24번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=3n-1$$

을 만족시킨다. $a_3=4$일 때, a_1+a_5의 값을 구하여라.15)

016. [2020학년도 6월(나형) 9번]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+(-1)^n\times a_n=2^n$$

을 만족시킨다. a_5의 값은?16)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

017. [2020학년도 수능(나형) 21번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_n-1$
(나) $a_{2n+1}=2a_n+1$

$a_{20}=1$일 때, $\sum_{n=1}^{63}a_n$의 값은?17)

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

018. [2013학년도 수능 27번]

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표는 각각 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 2)$이다.
(나) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 중점과 선분 $\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}$의 중점은 같다.

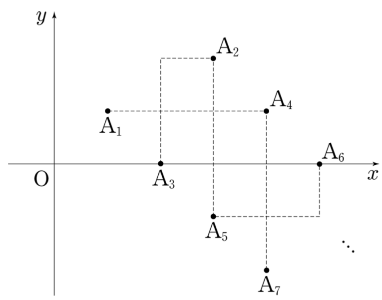
예를 들어, 점 P_4의 좌표는 $(1, -2)$이다. 점 P_{25}의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하여라.18)

019. [2012학년도 6월 17번]

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
(나) n이 짝수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다.
(다) n이 3 이상의 홀수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_k의 좌표가 $(7, -2)$이고 점 A_l의 좌표가 $(9, -7)$일 때, $k+l$의 값은?19)



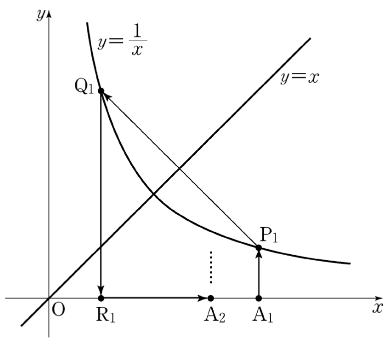
① 27　② 29　③ 31　④ 33　⑤ 35

020. [2010학년도 수능 22번]

자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(2,\ 0)$이다.
(나) (1) 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$과 만나는 점을 P_n이라 한다.
(2) 점 P_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 한 점을 Q_n이라 한다.
(3) 점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
(4) 점 R_n을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하자. $x_5=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라.[20] (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



021. [2014학년도 수능 11번]

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고

$$(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}\quad(n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면
$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$
이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면
$\dfrac{\log a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{\log a_n}{n}+\boxed{(가)}$
이다. $b_n=\dfrac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1=1$이고
$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}$
이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면
$b_n=\boxed{(나)}$
이므로
$\log a_n=n\times\boxed{(나)}$
이다. 그러므로 $a_n=10^{n\times\boxed{(나)}}$이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $\dfrac{g(10)}{f(4)}$의 값은?[21]

① 38 ② 40 ③ 42
④ 44 ⑤ 46

022. [수능 예시문항 13번]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$을 구하는 과정이다.

> $n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{a_1}=2$이다.
>
> $n=2$일 때, $a_2=S_2-S_1=-\frac{7}{6}$이므로
>
> $\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}$이다.
>
> $n\geq 3$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\frac{S_n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{k!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{S_k}{k!}=-\frac{\boxed{(가)}}{(n+1)!}$$
>
> 즉, $S_n=-\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$이므로
>
> $$a_n=S_n-S_{n-1}=-\left(\boxed{(나)}\right)$$
>
> 이다. 한편 $\sum_{k=3}^{n}k(k+1)=-8+\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이므로
>
> $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{8}{7}-\sum_{k=3}^{n}k(k+1)$$
>
> $$=\frac{64}{7}-\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{k=1}^{n}\boxed{(다)}$$
>
> $$=-\frac{1}{3}n^3-n^2-\frac{2}{3}n+\frac{64}{7}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$라 할 때, $f(5)\times g(3)\times h(6)$의 값은?22)

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

023. [2022학년도 6월 9번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고, $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은?23)

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

024. [2021학년도 6월 15번]

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 (*)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad +(2^{2m+2}-1)\times\boxed{(가)}+m\times 2^{-m-1} \\ &= \boxed{(가)}\times\boxed{(나)}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은?[24)]

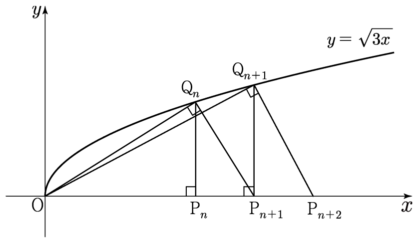
① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

025. [2021학년도 9월 16번]

모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 P_nQ_n이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 Q_nP_{n+1}이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OP_n}+\overline{P_nP_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{P_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 OP_nQ_n과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\boxed{(나)}\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은?[25)]

① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

026. [2021학년도 수능 21번]

수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$
(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_8-a_{15}=63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은?26)

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

027. [2022학년도 9월 15번]

수열 $\{a_n\}$은 $|a_1|\le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n-2 & \left(-1\le a_n<-\dfrac{1}{2}\right)\\ 2a_n & \left(-\dfrac{1}{2}\le a_n\le\dfrac{1}{2}\right)\\ -2a_n+2 & \left(\dfrac{1}{2}<a_n\le 1\right)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?27)

① $\dfrac{9}{2}$ ② 5 ③ $\dfrac{11}{2}$
④ 6 ⑤ $\dfrac{13}{2}$

028. [2022학년도 수능 21번]

수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1|=2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하여라.28)

029. [2023학년도 6월 15번]

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?29)

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

1) ①
2) ②
3) ⑤
4) ②
5) 58
6) 9
7) 39
8) 8
9) 13
10) ①
11) ②
12) ③
13) ⑤
14) ②
15) 8
16) ④
17) ④
18) 23
19) ①
20) 21
21) ①
22) ⑤
23) ⑤
24) ④
25) ⑤
26) ②
27) ①
28) 678
29) ②